新課程

# 大学への
# 数学 I

ニューアプローチ

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤田 宏
大東文化大学教授
長岡亮介
駿台予備学校教科専任講師
長岡恭史
共著

研文書院

New Approach

新課程

# 大学への
# 数学I
## ニューアプローチ

New Approach

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤田　宏
大東文化大学教授
長岡亮介
駿台予備学校教科専任講師
長岡恭史
共著

研文書院

# はしがき

高校数学の新しいカリキュラムに合わせて編まれた本書“大学への数学Ｉニューアプローチ”は，題名が示すように，二つの旗印を掲げている．

その第一は，数学に関して，大学受験での難関突破に自信がもてる学力を，将来の発展につながる正統的な勉強により身につけようとする真摯な諸君のお役に立つことである．

第二に，そのような高い水準に到達するための読者の負担や苦痛が最小化されるように，そうして読者の資質が効率よく引き出されるように，題材の精選および表現の工夫を新たにした点でニューアプローチ(新しい近づき方)である．

一流の大学——そこでは現代数学の研究者である教授達がその見識に基づいて数学の出題を行なう——の入試に関しては，高校数学の範囲であっても，浅薄な「技」や「術」に終始することなく，正統的な理論を理解し，筋目のただしい問題解決力を身につけることが成功への王道である．また，こうした勉強が，理科系のみならず文科系の諸専門に進む場合にも，これからの社会において重視される数学的な知性の育成につながるはずである．

“東大への解析Ｉ，解析II”と呼ばれた頃からの前身を辿れば，大学への数学シリーズはすでに40年に余る歴史を持っている．その間，高校カリキュラムの変更や入試の実態の変遷に応じた改善・改訂の努力は絶えず払われてきたのであるが，幸いに，大学へのシリーズにこめた，“正統的な勉学による実力の育成を”との我々の主張は，進学校の真剣な先生方の評価，および，気力と志に富んだ高校生・受験生の支持を一貫して受け続けたのである．この伝統的な長所は今回のシリーズでも確保したつもりである．

とはいえ，共通テスト（センター試験）が高校生の心配事として先行する現実のもとでは，理論体系に忠実なあまりに難行苦行を若い諸君に強いることは酷である．また，数学の優れた資質を

備えた生徒のなかにも，最初から完璧な学習を期すよりは大要を先に理解して後に知識の掘り下げに務めるのが大成の道であるタイプが少なくない．ニューアプローチから入るのが適切な場面の一つである．さらに，近年，視覚的な情報摂取への傾斜が著しい今日，中身が濃い内容を従来の形でビッシリと記載したページ作りをしたのでは，現代風な体裁になれた読者を閉口させることになろう．このような趣旨から，“ニューアプローチ”では，A篇の大幅な簡素化，活字の改善，視覚的な紙面作り，発展的材料の巻末章への分離などを行っている．問題篇であるB篇では，従来のスタイルを踏襲しつつ，指導要領の改訂の趣旨と最近の入試の動向をにらんで問題を更新・追加した．

さらに本書の内容について特筆しておくべきことは，指導要領の規定する数学Ⅰの内容を超えて，数学Aの単元である「数と式」の解説の章を設けたことである．その理由は，数と式についての初歩的であっても体系的な知識は，“先を目指して”高校数学を学習する生徒諸君にとって最初の段階から必須であることによる．

最後に，著者の陣容に表だって名を連ねてはいないが，本書の完成に対して，学識とセンスに基づいて大きな寄与をされた渡辺浩博士，若手の活力と造詣を活かして重要部分を担われた乙藤隆史さん（東京工大），元木稔さん（海城学園高校）に感謝したい．また，この機会に，社会の命運に関わる数学教育の重要性を的確に認識し，正統な数学の学習を支援する参考書の刊行という難事を多年にわたって遂行して来られた，研文書院とその代表者飯塚信之氏に敬意を表するものである．

1994年　春

藤田　宏
長岡亮介
長岡恭史

# 本書の特色

本書は，極めて個性の強い参考書であるが，その個性を短くまとめるなら，

基礎理論の解説・基本概念の説明に際しては，大学の立場に
　立って見てもおかしくない，きちんとしたものを与え

問題演習篇においては，真に取り組む価値のある良問を理論
　的教育的配慮に基づいて体系的に精選・新作し，また〈な
　ぜそのように解くか〉が伝わるような解答・解説をつけた．

ということである．さらに，検定教科書の平板な叙述に飽きたらない読者のために，

　上級の理論を視野に入れた発展的解説をもりこんだ

のも，他書にない特徴であろう．

# 本書の利用法

1°　A基礎篇で知識を整理した後に，B篇の演習問題を解くのが普通の学習の順序であろうが，必ずしもこれにこだわる必要はない．現在の力に応じて，解けそうなB篇の問題から手をつけるのも良い方法である．

2°　B演習問題の学習の理想的な形は，まず独力で問題を解き，その結果を本書の解答と比較検討することである．しかし，読者の現在の実力によっては，まず，本書の解を熟読理解し，同じ問題に再び接したときに独力で解けるようになることを目標とするのも，考えられる使い方の１つであろう．

3°　今回の指導要領では，高校数学全体の基本部分をなす「**数と式**」という単元が，数学Ⅰからはずされ，数学Aの選択単元の１つとして扱われることになっている．しかし，大学入試を視野に入れた勉強を志すものにとって，この行政的決定は，非効率の足かせでしかない．読者は，できるだけ早い時期に，可能なら，適当な指導者のもとで，本書第５章の内容を一通り理解するべきである．

# ▨内容一覧▨ A 基礎理論篇

# ▨内容一覧▨　B演習問題篇（106題）

## §1　二次関数（14 題）



## §2　図形と計量（21 題）



## §3　個数の処理（23 題）

§4　確　　率　(17 題)



§5　数　と　式　(A篇のみで，B篇はありません)

§6　発展問題　(31 題)

## ▨内容一覧▨　C探究篇



## ▨内容一覧▨　◇◇◇

◇◇◇

***Repos***（ルポ）（フランス語で，ひとやすみの意味）



◇◇◇



◇◇◇

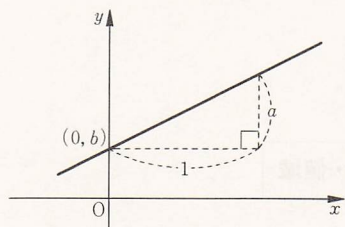
# §1 二次関数

## キー・ワード　（A基礎理論篇）

## A1.1　関数とそのグラフ

中学では，正比例という．最も基本的な関数関係から出発し，2年生では，

$$y=ax+b \qquad (a,\ b \text{ は定数})$$

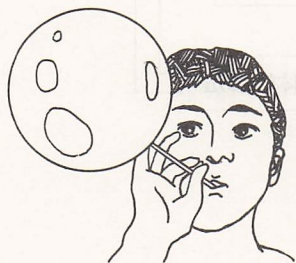
と表される1次関数を，3年生では，$y=ax^2$ で表される関数まで学んだ．1次関数についての学習は次のように要約される．

> 1次関数 $y=ax+b$ のグラフは，
> $\begin{cases} \text{傾きが } a \\ y \text{ 切片が } b \end{cases}$
> の直線である．

本章では，1次関数を一段階だけ複雑化した2次関数の一般論を学ぶが，その前に〈関数とは何か〉〈グラフとは何か〉という根本問題について復習し，理解を深めておこう．本格的な話は，数学IIに譲り，本書では‘古典的立場’から関数の定義を考えることにする．

### I．関数の古典的定義

たとえば，シャボン玉をふくらませているとき，シャボン玉が完全な球であるとして，半径を $x$，表面積を $y$ とおく．空気を送り込んで，シャボン玉が大きくなっていくと，$x$ も $y$ も増大していくが，これらの間には，つねに

$$y=4\pi x^2$$

という関係式が成り立っている．このように

> ［定義］　2つの変数 $x$，$y$ の間に，ある特定の関係があり，$x$ の値を決めると，$y$ の値も決まるとき，$y$ は $x$ の関数であるという．

1°　$x$, $y$ は一般にいろいろな値をとりうる文字，すなわち変数であるから，その気分を出すために，上の定義の「$x$の値を決めると，$y$の値も決まる」という部分を「$x$の値が変わっていくにつれ，これにともなって$y$の値も変化する」と表現することがある．しかし，$x$の値が変わっても，$y$はつねにある定数値をとる，というものも，関数の仲間に入れたいこともあって，正式な定義では「変化する」という表現を避けて「決まる」という言い方をするのである．

なお，$y$の値がいつも一定である関数のことを **定数関数** という．

2°　$y=4\pi x^2$ のように，$y$が$x$の関数であるときには，$y$は$x$の式で表されることが一般的である．

そこで，この式を，$f(x)$という記号で表す．

式$f(x)$において，$x$の値が $x=a$ であるとき，その値を$f(a)$と表す．

例　$f(x)=x^2+1$ とすれば

$f(1)=1^2+1=2$, $f(5)=5^2+1=26$, $f(a)=a^2+1$

3°　中学で学んだ1次関数とは，この$f(x)$が$x$の1次式である場合であった．これから学ぶ2次関数とは，$f(x)$が，

$$f(x)=3x^2-5x+1$$

のような2次式になるものである．

4°　$x=a$ に対する関数の値を，

$x=a$ における **関数値**

(あるいは，点$a$における関数値)

ともいう．したがって，$f(a)$は $x=a$ における関数値を表すことになる．

## II．関数の定義域・値域

関数 $y=f(x)$ において変数$x$は，すべての値をとりうるとは限らない．たとえば，反比例の関数を表す関数 $y=\dfrac{1}{x}$ において，$x$は，0を値としてとることはない．また，いわゆる応用問題では，問題の意味から，変数のとりうる値の範囲に制限

を設けるべきであることも多い．(たとえば，シャボン玉の例では，球の半径 $x$ は，$x>0$ を満たすものでなくてはならない．当然，$x$ には上の限界もあろう．)　このように

［**定義**］　関数 $y=f(x)$ において，変数 $x$ のとりうる値の範囲を，この関数の **定義域** という．

1°　高校数学の範囲では，特別のことわり書きがない限り，関数の定義域は実数全体 (A5.1 参照) (あるいは，式が意味をもつような数の全体) であることが多いので，定義域についてふだんはあまり神経質になる必要はない．そんなこともあって，定義域を明示する必要がある場合でさえ，定義域を表すために，たとえば，

$$y=4\pi x^2 \quad (x>0)$$

のように，関数を表す式の横に括弧(かっこ)書きで添えて書く．さらに，(　) も省略するという簡略法も，通用している．

つぎに，$y$ のとりうる値の範囲を考えよう．たとえば，関数 $y=x^2$ では，$x$ がどんな実数値をとっても $y$ は負にならない．このように，関数 $y=f(x)$ において，たとえ，変数 $x$ の値の範囲に限定がない場合でも関数の値，つまり $y$ のとりうる値の範囲に制限がつくことが少なくない．

［**定義**］　関数 $y=f(x)$ において，変数 $y$ のとりうる値の範囲を，この関数の **値域** という．

1°　例　関数 $y=-x^2$ の値域は，$y\leqq 0$ を満たす実数全体である．

2°　例　関数 $y=x^2$, $x\geqq 3$ の値域は，$y\geqq 9$ となる実数全体である．

3°　関数の値域に属する数のうちの最大のもの (が存在すれば，それ) を関数の **最大値** という．同様に，関数の **最小値** とは，値域に属する数のうちの最小のものである．

例　$y=2x+1$，$0\leqq x\leqq 1$ の値域は $1\leqq y\leqq 3$ となる実数全体であり，したがって，この関数の

最大値は3，最小値は1

である．このようなときに，

$$\max_{0\leqq x\leqq 1} y=3, \qquad \min_{0\leqq x\leqq 1} y=1$$

のように書くことがある．

### III. 関数のグラフ

一次関数についてすでに学んできたように，関数

$$y=f(x)$$

が与えられたとき，定義域に属する $x$ の値を $x$ 座標とし，そのときの関数値を $y$ 座標とする点 $(x,\ y)$ を $xy$ 平面上にとっていけば $xy$ 平面上の曲線(特別な場合は直線)ができる．これを関数 $y=f(x)$ の **グラフ** という．

**[定義]**　$X$ を定義域とする関数

$$y=f(x), \qquad x\in X$$

のグラフとは，$xy$ 平面上の集合

$$\{(x,\ y)\,|\,y=f(x) \text{ かつ } x\in X\}$$

のことである．

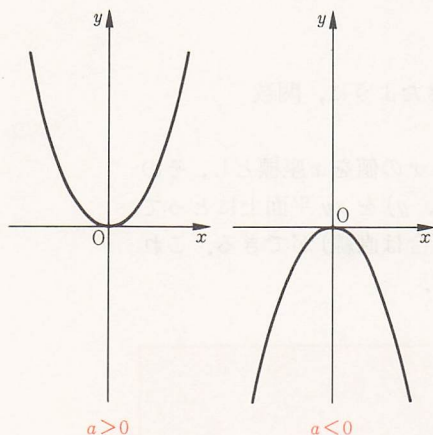
1°　いいかえれば，関数 $y=f(x)$ のグラフとは，$x$，$y$ に関する等式($x$，$y$ に関する方程式といってもよい)

$$y=f(x) \qquad (x\in X)$$

を満足する $x$，$y$ を座標にもつ点 $(x,\ y)$ の全体である．

2°　グラフを描くことができれば，関数の値の変化は一目瞭然！グラフは，関数の値域や最大値・最小値を求めるのに，極めて有効な手段である．

# A1.2　2次関数

本節では，$y$ が
$$y=ax^2+bx+c$$
（ただし，$a$，$b$，$c$ は定数で，$a\neq 0$ とする．）
という形で表される関数，すなわち $x$ の2次関数について学ぶ．導入的な説明は教科書に譲り重要なポイントを拾うことにする．

## Ⅰ．平方完成

2次関数のうちでもっとも簡単な
$$y=ax^2$$
のグラフは，原点を頂点とし，$y$ 軸を軸とする **放物線** である．

図のように，

$a>0$ なら，上側に開いた（下に凸の）形

$a<0$ なら，下側に開いた（上に凸の）形

をもつ．

一般の2次関数
$$y=ax^2+bx+c$$
のグラフや性質は，この右辺を平方完成すること，すなわち
$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$
の形に書きかえることによって，$y=ax^2$ の性質と結びつけて理解することができる．

1°　平方完成の手順は，初めは難しそうに見えるかもしれない．が，慣れてしまえば何でもない．

## Ⅱ．2次関数のグラフ

一般の2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，原点に頂点をもつ2次関数 $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものである．平行移動の大きさを知るには，

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta$$

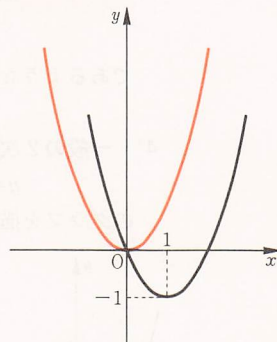
と平方完成した上で，次の定理を用いればよい．

［定理］　$\alpha$，$\beta$ を定数とするとき，
関数 $y=f(x-\alpha)+\beta$ のグラフは，
関数 $y=f(x)$ のグラフを
$x$ 軸の方向に $\alpha$
$y$ 軸の方向に $\beta$ だけ平行移動
したものである．

**関数のグラフと平行移動**

1°　例　$y=x^2-2x$　は，　$y=(x-1)^2-1$
と変形できるので，そのグラフは

$$y=x^2$$

のグラフを
$x$ 軸方向に 1，$y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したものである．

2°　上の定理は，次のように証明される．
点 $(X,\ Y)$ が，方程式

$$y=f(x-\alpha)+\beta$$

と表す曲線上にあるとは，$X$，$Y$ の間に

$$Y=f(X-\alpha)+\beta$$

つまり

$$Y-\beta=f(X-\alpha)$$

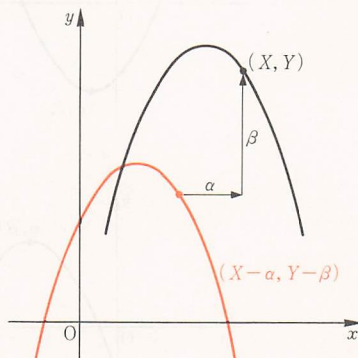
という等式が成り立つことであるが，これは，点 $(X,\ Y)$ を $x$ 軸方向に $-\alpha$，$y$ 軸方向に $-\beta$ だけ平行移動した点 $(X-\alpha,\ Y-\beta)$ が，方程式

$$y=f(x)$$

の表す曲線上にあることを意味している．
つまり，点 $(X,\ Y)$ は，曲線

$$y=f(x)$$

上のある点を，$x$ 軸方向に $\alpha$，$y$ 軸方向に $\beta$ だけ平行移動したものである．

詳しくは ☞B.101

**$y=a(x-\alpha)^2+\beta$ のグラフ**

> [まとめ]　2次関数 $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ のグラフは，放物線 $y=ax^2$ を平行移動して，頂点が，$(\alpha,\ \beta)$ にくるようにしたものである．

3°　したがって，$y=a(x-\alpha)^2+\beta$ のグラフは，

> 頂点が　点 $(\alpha,\ \beta)$
> 軸が　　直線 $x=\alpha$

であるような放物線である．

4°　一般の2次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフを描くには，この式を平方完成により

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta$$

という形に変形し，

1)　$a$ の正・負
2)　頂点 と 軸

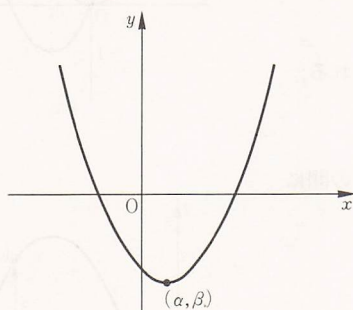
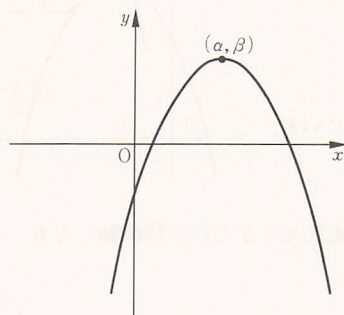
に注意するのが基本であるが，このほかに

3)　$y$ 切片が $c$ である（$y$ 軸との交点が点 $(0,\ c)$ である）

ことに気を配ることも悪くない．

4)　$x$ 軸との交点の座標は，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解であるから，これが解ける場合には，$x$ 軸との交点を求めることもできる．（しかし，$x$ 軸との交点は存在しない場合もある．）

$a>0$

$a<0$

**III. 2次関数の値域と最大値，最小値**

2次関数の値域を調べるには，そのグラフを考えるのが基本的であり，しかも得策である．

グラフを考えれば，定義域に特別の制約がつかない2次関数

$$y=a(x-\alpha)^2+\beta$$

において，次のことが成り立つことは，すぐにわかる．

> 2次関数 $y=a(x-\alpha)^2+\beta$　（定義域は実数全体）
> については，
> $a>0$ ならば，$x=\alpha$ において最小値$=\beta$ をとる．
> 最大値は存在しない．
> $a<0$ ならば，$x=\alpha$ において最大値$=\beta$ をとる．
> 最小値は存在しない．

**2次関数の最大値，最小値**

1°　上の性質は，2次関数の定義域として，実数全体をとったときの話である．定義域が制限されている場合には，話は別である．

ガイド☆　☞ B.105，106，…

## A1.3　方程式の解

1次方程式 $3x+2=0$ や2次方程式 $x^2-6x+5=0$ の解法については中学校で学んでいる．したがって，いまさら方程式の解の定義を述べることもないはずであるが，「なんとなくわかっている」ことと，「精密に理解している」ことは同じではない．

ここでは，中学の復習を兼ねて，方程式の基本用語をまとめておこう．

たとえば，$f(x)=x^2-4x+3$ として，$x$ についての条件

$$f(x)=0$$

を考えると，この条件を満たす $x$ の値は，$x=1$ と $x=3$ の2つである．このように，

変数 $x$ をふくむ等式 $f(x)=0$　　　　　……… ①

を，この等式を満たす $x$ の値を求めるという気持で見つめるときに，①を

$x$ を未知数とする **方程式**

という．そして，方程式を満たす $x$ の個々の値を

方程式の **解**，あるいは **根**

という．

方程式を解くとは，方程式の解をすべて求めることである．解の集合を決定することである，といいかえてもよい．

1°　方程式 $(x-1)^2(x-3)=0$ の解は，1と3である．

「方程式 $(x-1)^2(x-3)=0$ を解け」に対する標準的な答は

$x=1$ または $x=3$　　　　　……… ②

である．これを

$x=1,\ 3$　　　　　……… ③

と略記する習慣がある．

2°　昭和47年頃から文部省が，方程式の解という用語を強制して以来，根(コン)という語は，中学・高校数学から姿を消しているが，今でも外国では根に相当する語(英語では root)が多数派である．

3°　特別な方程式では解の個数が無数になることがある．

たとえば，方程式

$0\cdot x=0$

については，任意の数が解である．

一方，特別な方程式は解を持たない．たとえば，

$x+1=x$

を満足する数 $x$ は存在しない．したがって，方程式

$x+1=x$

は，解を持たない．

4°　2つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ とが，**方程式として同値**であるとは，

方程式 $f(x)=0$ の解の集合と方程式 $g(x)=0$ の解の集合が一致する

ことである．たとえば，$x^2=0$ と $x=0$ は方程式として同値である．これを

$$x^2=0 \iff x=0$$

のように表す．

与えられた方程式の項を移項したり，両辺に0でない数を掛けたりする操作は，方程式の同値変形である．

「方程式を解く」とは，与えられた方程式を，最も単純で同値な方程式に変形することにほかならない．たとえば

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{3}=-\frac{5}{6} \iff x=2$$

## A1.4　1次方程式

$a$，$b$ を与えられた定数 $(a\neq 0)$ として，未知数 $x$ について

$$ax+b=0$$

という形で与えられる方程式を，**1次方程式** という．

1次方程式 $ax+b=0$ の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ である．

方程式 $ax+b=0$ において，$a=0$ の場合は少し難しい．すなわち

i）$a=0$ で $b\neq 0$ ならば，解は存在しない．(不能)

ii）$a=0$ でさらに $b=0$ ならば，解は任意の数である．(不定)

## A1.5　2次方程式の解法

$a$，$b$，$c$ を与えられた定数 $(a\neq 0)$ として，未知数 $x$ について

$$ax^2+bx+c=0$$

という形で与えられる方程式を **2次方程式** という．

実数 $A$，$B$ について

$$A\times B=0 \text{ ならば，} A=0 \text{ または } B=0$$

である．2次方程式はこの性質を用いて解くことができる．

### I．因数分解による解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の左辺が，2つの1次式 $A$，$B$ の積に因数分解されるとき，この2次方程式の解は，2組の1次方程式

$$A=0, \quad B=0$$

それぞれを $x$ について解くことにより得られる．

［例］ $2x^2-x-6=0$

因数分解により $(2x+3)(x-2)=0$

$$2x+3=0 \text{ より } x=-\frac{3}{2}$$

$$x-2=0 \text{ より } x=2$$

よって，求める解は

$$x=-\frac{3}{2},\ 2$$

### II．解の公式による解法

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は，次の公式で与えられる．この公式を修得していれば，いかなる2次方程式に出会ってもたじろぐことがない．

**解の公式**

［公式］

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1°　この公式を中学で学んでいる人もいるだろう．平方完成を用いてこの公式を導くことは教科書にまかせる．

## A1.6　2次方程式の解の判別

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

について,

$$D=b^2-4ac \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を, ①の **判別式** という. この$D$を用いれば, ①の解は

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ または } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と書ける. このそれぞれを $\alpha$, $\beta$ で表すことにしょう.

判別式という名の由来は, この符号で, 高校の範囲で普通に現れてくる2次方程式(つまり係数が実数のもの)については, その解の基本性質が判定できることによる. すなわち

[1] $D>0$ ならば, 解 $\alpha$, $\beta$ はともに実数となり, かつ, $\alpha\neq\beta$ である. すなわち, ①は **相異なる2つの実数解** をもつ.

[2] $D=0$ ならば, 解 $\alpha$, $\beta$ はともに実数となり, かつ, $\alpha=\beta$ である. ①は **重複した実数解(重解)** をもつという.

[3] $D<0$ ならば, ①を満たす $x$ の値は(実数の範囲に)存在しない.

1° 判別式は, 2次方程式を考える際の要(かなめ)となる重要概念であるが, 不幸なことに, 文部省の検定を通過した教科書では, 数学Aや数学IIにおいてさえ, 判別式という用語や概念の記述が許されていない.

2° 実数解のことを **実根**, 重複した解(重解)のことを **重根** ともいう.

3° [例] $x^2+6x+k=0$ ($k$ は実数) の解を判別しよう. 判別式を $D$とおけば,

$$D=36-4k$$

したがって,

$$\begin{cases} k<9 \text{ のとき, 2つの異なる実数解} \\ k=9 \text{ のとき, 重解} \\ k>9 \text{ のとき, 実数の範囲には存在しない.} \end{cases}$$

4°　判別式を表すのに文字$D$がよく用いられるのは，判別式の英語 discriminant から来ている．

5°　①の２根を$\alpha$，$\beta$とするとき，判別式$D$は$\alpha$，$\beta$と$a$を用いて

$$D=a^2(\alpha-\beta)^2$$

と表すことができる．

## A1.7　解と係数との関係

２次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の２つの解を$\alpha$，$\beta$とすれば，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

が成り立つ．

1°　解の公式から，$\alpha$，$\beta=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であることを用いれば，上の関係を導くのは簡単である．理論的には，むしろ逆なのであるが，…….

2°　解を用いた因数分解：

解と係数の関係を用いると，

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\\&=a(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

であるから，あらかじめ$\alpha$と$\beta$を求めておけば，２次式 $ax^2+bx+c$ は $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される．

例　$x^2+2x-1=0$ の解は，$x=-1\pm\sqrt{1^2-(-1)}=-1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，$x^2+2x-1$ は

$$x^2+2x-1=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$$

と因数分解される．

3°　$u$, $v$ を定数とするとき，連立方程式

$$\begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases}$$

によって定められる $x$, $y$ を求めるには，$t$ についての2次方程式

$$t^2-ut+v=0$$

を解けばよい．解と係数との関係により，この2次方程式の2つの解が上の $x$, $y$ の条件を満足するからである．

例　$x+y=-2$, $xy=-1$ となる2数 $x$, $y$ の求め方．

$x$, $y$ は2次方程式

$$t^2+2t-1=0$$

の2解である．この2次方程式の解は $t=-1\pm\sqrt{2}$ であるから，

$$\begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \\ y=-1-\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x=-1-\sqrt{2} \\ y=-1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

## A1.8 不等式

たとえば

$$2x-1>x+2 \qquad \cdots\cdots ①$$

のように，$x$ に対する条件が不等式で与えられたとき，これを満足する $x$ の値全体の集合を，不等式①の解という．このような解を求めることを，不等式①を解くという．

1°　方程式の場合とちがって，①を満たす $x$ の個々の値を解とはいわない．不等式①を解くとは，結局のところ，①を満たす $x$ の値全体の集合を，わかりやすく表示することである．

例　不等式 $2x-1>x+2$ の解は，上の定義に従えば，集合

$$\{x \mid 2x-1>x+2\}$$

であるとしても論理的な間違いではないが，この集合はもっとわかりやすく

$$\{x \mid x>3\}$$

と表される．すなわち

不等式 $2x-1>x+2$ の解は，$\{x \mid x>3\}$ である

ということになる．

2°　不等式の解を表す際には，集合を答えるかわりに，集合を定める条件だけをぬき出して，たとえば

$$x>3$$

のように答えるのが，昔からの習慣である．本書でも以下この習慣に合わせる．

## A1.9　不等式の基本的な扱い

1次不等式の解法は中学で学んでいる．そのときの扱いの基本となった次の事実を復習しておこう．

### I．不等式の変形の基礎

［定理］　1)　$A>B \iff A+C>B+C$

2)　$C>0$ ならば，$A>B \iff CA>CB$

$C<0$ ならば，$A>B \iff CA<CB$

**不等式の同値変形**

1°　3)　$A>B,\ B>C \implies A>C$

4)　$A>B,\ C>D \implies A+C>B+D$

なども，不等式の重要性質であるが，これらについては，$\Longleftarrow$ が成立しない（つまり，同値変形でない）ので，不等式の解を定めるのには，利用できない．

## A1.10　連立不等式

たとえば,

$$2x-1>x+2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

および

$$x+2<10 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を共に満足する$x$全体の集合を求めること(すなわち，両方の不等式を満足する$x$の範囲を定めること)を，①，②を **連立不等式** として解くという.

①だけを解けば

$$x>3 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

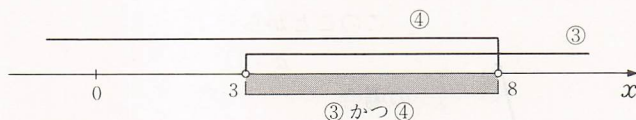
であり，②だけを解けば

$$x<8 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

である.

したがって，①，②を連立不等式として解いた答は，③，④の共通範囲，つまり

$$3<x<8 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である．⑤は，'$x>3$ かつ $x<8$' に対する省略表現である.

## A1.11　2次不等式の解法

以下において，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の判別式を$D$で表す．すなわち,

$$D=b^2-4ac.$$

また，2次不等式が与えられたときは，整理して

$$ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c<0$$

の形にすることができるが，ここで $a<0$ ならば，両辺に $-1$ を掛けて（不等号の向きもかえて）$a>0$ の場合に帰着することができる．そこで **以下では，$a>0$ の仮定のもとに，**

$$ax^2+bx+c>0$$

および

$$ax^2+bx+c<0$$

について調べることとする．

### I．2次不等式の解(1) $D>0$ の場合

$D>0$ のとき，2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

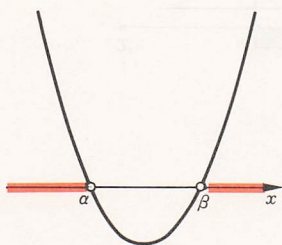
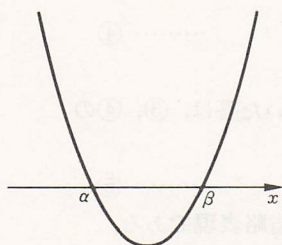
は相異なる解をもつ．そこで，これらを $\alpha$，$\beta$（ただし $\alpha<\beta$）とおくと，関数

$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフは $x$ 軸の2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる．

このことから

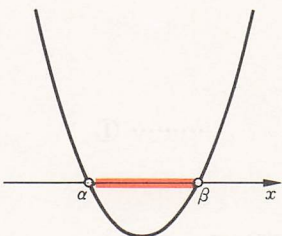
$$a>0$$

の場合

$$ax^2+bx+c>0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

の解は，

$$x<\alpha \text{ または } \beta<x \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

である（2解の外側）．

また，

$$ax^2+bx+c<0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

の解は，

$$\alpha<x<\beta \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

である（2解の間）．

1°　上のように，グラフを考えれば，上の事柄を納得しやすい．

2°　といっても，本当は，$\alpha$，$\beta$ を用いると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解されることを利用して，$x$ の値に応じて

$(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号がどのように変化するかを調べることにより①や③の解を定めるのが，理論的には正当なのである．

| $x$ | $x<\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha<x<\beta$ | $\beta$ | $\beta<x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-\alpha$ の符号 | − | 0 | ＋ | ＋ | ＋ |
| $x-\beta$ の符号 | − | − | − | 0 | ＋ |
| $(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号 | ＋ | 0 | − | 0 | ＋ |

## II．2次不等式の解(2)　$D=0$ の場合

$a>0$ かつ $b^2-4ac=0$ の場合には，2次関数

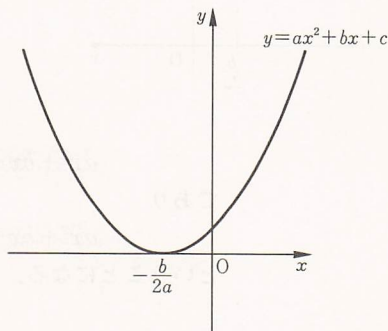
$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフは，右のように，$x$ 軸に，

$x=-\dfrac{b}{2a}$ の点で接する．

したがって，$\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ とおけば，

$ax^2+bx+c>0$ の解は
　$x=\alpha$ を除く実数全体
$ax^2+bx+c<0$ の解は
　なし

ということになる．

1°　$b^2-4ac=0$ のとき2次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

は，重複解をもつ．

それを $x=\alpha$ とおくと，2次式 $ax^2+bx+c$ は

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

と因数分解される．

$a>0$ である場合には，$a(x-\alpha)^2$ の符号は $(x-\alpha)^2$ のそれと一致するので，

$$x=\alpha \iff a(x-\alpha)^2=0$$
$$x\neq\alpha \iff a(x-\alpha)^2>0$$

がいえる．くわしくは下表を利用してもよい．

| $x$ | $x<\alpha$ | $\alpha$ | $\alpha<x$ |
|---|---|---|---|
| $x-\alpha$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x-\alpha)^2$ | $+$ | 0 | $+$ |

## Ⅲ．2次不等式の解(3)　$D<0$ の場合

$D<0$ の場合，$a>0$ であるならば2次関数

$$y=ax^2+bx+c$$

のグラフは，左図のように，$x$ 軸より上方に浮いた状態になる．よって不等式

$$ax^2+bx+c>0$$

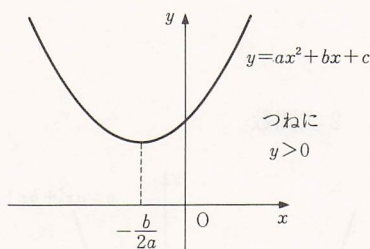
がつねに成り立つ．

したがって

$ax^2+bx+c>0$ の解は 実数全体

であり

$ax^2+bx+c<0$ の解は なし

ということになる．

## A1.12　2次不等式の解(等号付きの場合)

たとえば，$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は，

　不等式　$ax^2+bx+c>0$ の解に

　方程式　$ax^2+bx+c=0$ の解

をつけ加えたものである．

$$ax^2+bx+c \leqq 0$$

についても同様．

結果を表でまとめよう．ただし，$a$ は $a>0$ とする．

| $D$ の符号 | $ax^2+bx+c \geqq 0$ の解 | $ax^2+bx+c \leqq 0$ の解 |
|---|---|---|
| $D>0$ | $x \leqq \alpha,\ \beta \leqq x$ | $\alpha \leqq x \leqq \beta$ |
| $D=0$ | 実数全体 | $x=\alpha$ |
| $D<0$ | 実数全体 | 解なし |

1°　$ax^2+bx+c \geqq 0$ $(a \neq 0)$ が任意の実数 $x$ に対して成り立つための条件は，

$$a>0 \quad かつ \quad D \leqq 0$$

である．(2次関数の非負値条件)

2°　$ax^2+bx+c>0$ $(a \neq 0)$ が任意の実数 $x$ に対して成り立つための条件は，

$$a>0 \quad かつ \quad D<0$$

である．(2次関数の正値条件)

## B.101

(1)　放物線 $y=x^2$ を $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を描きその方程式を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2$ を $x$ 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線を描きその方程式を求めよ．

(3)　放物線 $y=\frac{1}{3}x^2$ を $x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動した放物線を描きその方程式を求めよ．

**アプローチ**　グラフを平行移動することは，たいして難しくありませんが，方程式の方はどうでしょう．結果的には，$x$ 軸方向に $a$，$y$ 軸方向に $b$ だけ平行移動するには，$x$ を $x-a$ で，$y$ を $y-b$ で置き換えればいいのですが，なぜそれでいいのかをきちんと理解するのは，そうた易いことではありません．しかしここで，数学を深く理解する人とそうでない人の道が分かれるのです．

平行移動した後の曲線の上の点を考えるのがポイント．

**解答**　(1)　点 $(x,\ y)$ が平行移動した後の曲線上にあるとする．点 $(x,\ y-2)$ を $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動すると点 $(x,\ y)$ に来る．よって点 $(x,\ y-2)$ は平行移動する前の曲線 $y=x^2$ 上になければならないから，

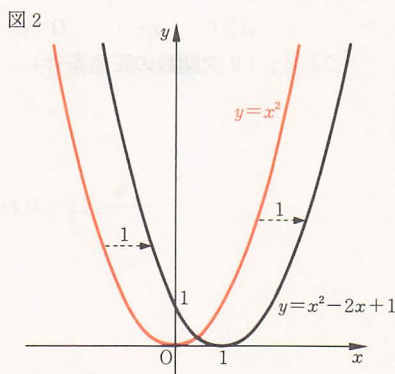
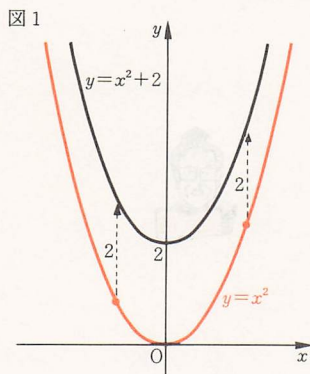
$$y-2=x^2$$

これが平行移動した後の曲線を表す．

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=x^2+2}.$$

グラフは図 1 のようになる．

図 1

図 2

**(2)**　点$(x,\ y)$が平行移動した後の曲線上にあるとすると，点$(x-1,\ y)$は平行移動する前の曲線 $y=x^2$ 上になければならないから，

◀点$(x-1,\ y)$を$x$軸方向に1だけ平行移動すると$(x,\ y)$に来る．

$$y=(x-1)^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=x^2-2x+1}$$

グラフは図2のようになる．

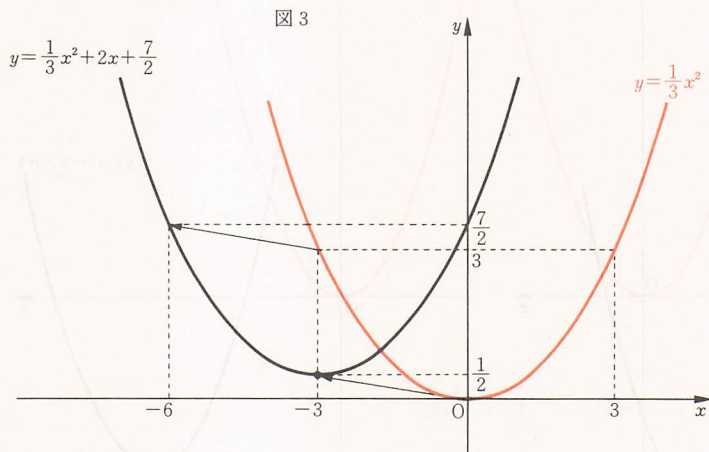
**(3)**　点$(x,\ y)$が平行移動した後の曲線上にあるとすると，点$\left(x+3,\ y-\dfrac{1}{2}\right)$は平行移動する前の曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上になければならないから，

◀点$\left(x+3,\ y-\dfrac{1}{2}\right)$を$x$軸方向に$-3$，$y$軸方向に$\dfrac{1}{2}$だけ平行移動すると，点$(x,\ y)$に来る．

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(x+3)^2$$

$$\therefore\quad y-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}x^2+2x+3$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{2}}.$$

グラフは図3のようになる．

注意　点$(x-a,\ y-b)$を$x$軸方向に$a$，$y$軸方向に$b$だけ平行移動すると，点$(x,\ y)$に来る．したがって，放物線 $y=x^2$ を$x$軸方向に$a$，$y$軸方向に$b$だけ平行移動した曲線の上に点$(x,\ y)$を取れば，点$(x-a,\ y-b)$は放物線 $y=x^2$ 上になければならない．すなわち平行移動後の曲線の方程式は

$$y-b=(x-a)^2 \qquad \therefore\quad y=(x-a)^2+b.$$

## B.102

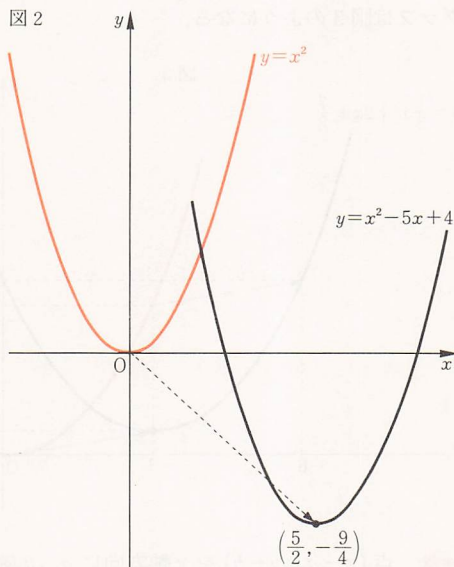
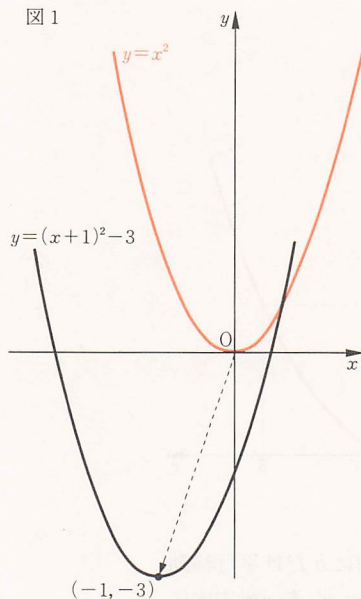
次の２つの放物線はそれぞれどのような位置関係にあるか図示して説明せよ．

(1)　$y=x^2$ と $y=(x+1)^2-3$

(2)　$y=x^2$ と $y=x^2-5x+4$

(3)　$y=2x^2-x$ と $y=2x^2+3x+1$

**アプローチ**　放物線 $y=ax^2+bx+c$ は放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものです．すなわち，$x^2$ の係数 $a$ は放物線の形を定め，$b$ と $c$ は位置を定めます．放物線の位置を調べるための式変形は「平方完成」と呼ばれています．

**解答**　(1)　$y=(x+1)^2-3$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に $-3$ 平行移動したものである(図１)．

(2)　$x^2-5x+4$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$$

よって $y=x^2+5x-1$ のグラフは，$y=x^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $\frac{5}{2}$，$y$ 軸方向に $-\frac{9}{4}$ 平行移動したものである(図2)．

**(3)**　$2x^2-x=2\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$

$$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

$$2x^2+3x+1=2\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)+1$$

$$=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+1$$

$$=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$$

よって放物線 $y=2x^2-x$ の頂点は $\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$，放物線 $y=2x^2+3x+1$ の頂点は $\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$ である．

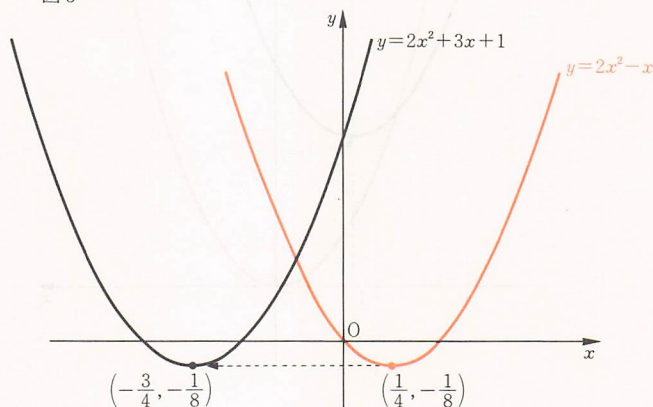
◀頂点の位置に注目．

よって $y=2x^2+3x+1$ は $y=2x^2-x$ を

$x$ 軸方向に　$-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=-1$

$y$ 軸方向に　$-\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)=0$

平行移動したものである(図3)．

図3

## B.103

(1)　放物線 $y=x^2+2x+3$ は，$y$ 軸に平行なある直線に関して対称である．この直線を求めよ．

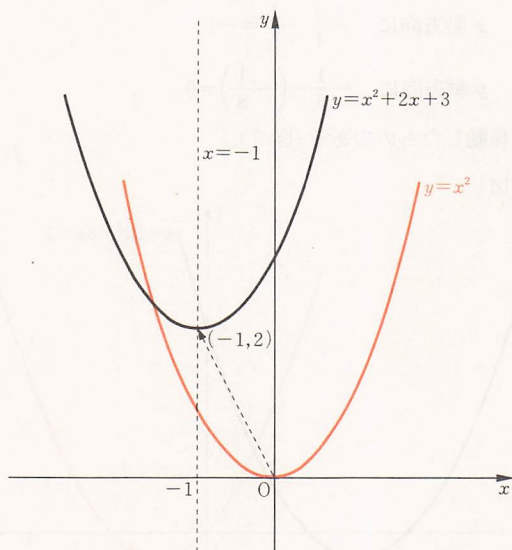
(2)　放物線 $y=-x^2$ を平行移動した放物線で，点 $(5,\ -1)$ を通り，直線 $x=3$ に関して対称なものを求めよ．

**アプローチ**　放物線 $y=ax^2+bx+c$ は放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものであり，放物線 $y=ax^2$ は $y$ 軸に関して対称ですから，放物線 $y=ax^2+bx+c$ は $y$ 軸に平行なある直線に関して対称になります．よくわからない人はB.101，B.102 の解答の図をよく見て下さい．

**解答**　(1)　　$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

であるから，放物線 $y=x^2+2x+3$ は，放物線 $y=x^2$ を $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．この平行移動により $y$ 軸は $x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動されて，直線 $x=-1$ となる．

直線 $x=-1$ は $y$ 軸方向に平行移動しても変わらない．

よって放物線 $y=x^2+2x+3$ は直線 $\boldsymbol{x=-1}$ に関して対称である．

(2)　放物線 $y=-x^2$ は $y$ 軸に関して対称であるから，求める放物線は，$y=-x^2$ を $x$ 軸方向に 3，$y$ 軸方向に $b$ だけ平行移動したものであるとしてよい．

すると，求める放物線は

$$y=-(x-3)^2+b \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

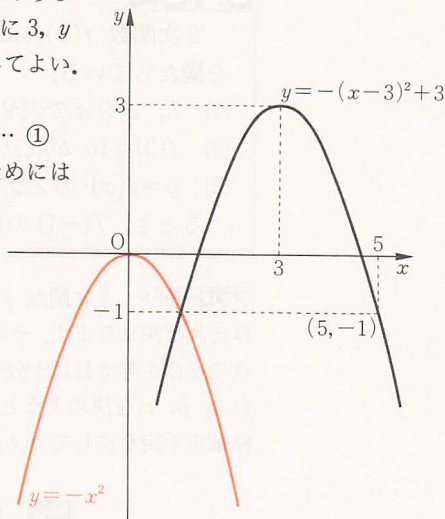
と表せる．この放物線が点 $(5,\ -1)$ を通るためには

$$-1=-(5-3)^2+b$$

$$\therefore\quad b=3$$

でなければならない．よって①より

$$y=-(x-3)^2+3$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x^2+6x-6.}$$

研究　放物線 $y=x^2+2x+3$ を直線 $x=-1$ に関して対称に移してみよう．そのためにまず，点 $(X,\ Y)$ を直線 $x=-1$ に関して対称に移す．移った先の点を $(X',\ Y)$ とすると $x$ 軸上で $X$ と $X'$ の中点が $-1$ となるから

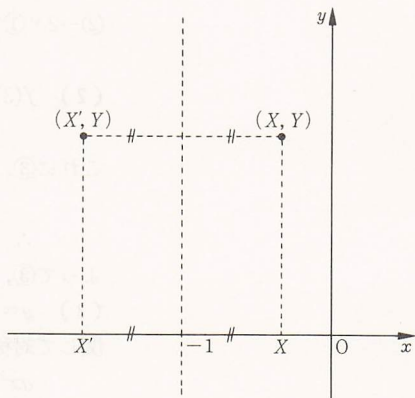
$$\frac{X+X'}{2}=-1$$

$$\therefore\quad X'=-2-X$$

すなわち，点 $(X,\ Y)$ と点 $(-2-X,\ Y)$ は直線 $x=-1$ に関して対称である．

次に放物線 $y=x^2+2x+3$ を対称に移す．点 $(X,\ Y)$ を移った先の放物線上の点とすると，点 $(-2-X,\ Y)$ はもとの放物線の上になければならないから

$$\begin{aligned}Y&=(-2-X)^2+2(-2-X)+3\\&=X^2+4X+4-4-2X+3\\&=X^2+2X+3\end{aligned}$$

となる．これは，放物線 $y=x^2+2x+3$ がそれ自身に移ることを意味する．

## B.104

2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(1)=2$, $f(2)=7$ を満たしている.

(1) $b$, $c$ を $a$ で表せ.

(2) $f(3)=16$ が成立するように $a$, $b$, $c$ の値を定めよ.

(3) $y=f(x)$ のグラフが, 直線 $x=-2$ に関して対称であるとき, $f(-1)$ の値を求めよ.

**アプローチ** 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は3つの係数 $a$, $b$, $c$ を与えれば決まります. そのためには, $y=ax^2+bx+c$ のグラフ上の3点の座標を与えれば十分です. (2)では3点 (1, 2), (2, 7), (3, 16) から $a$, $b$, $c$ を決めようとしています. また(3)では(2)の条件を忘れ, 対称軸を手掛りにして $a, b, c$ を決めます. B.103(2)を思い出しましょう.

**解答** (1) $f(1)=2$, $f(2)=7$ より,

$$\begin{cases} a+b+c=2 & \cdots\cdots ① \\ 4a+2b+c=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②−① より

$$3a+b=5 \quad \therefore \quad \boldsymbol{b=-3a+5} \quad \cdots\cdots ③$$

②−2×① より

$$2a-c=3 \quad \therefore \quad \boldsymbol{c=2a-3} \quad \cdots\cdots ④$$

(2) $f(3)=16$ より

$$9a+3b+c=16$$

これに③, ④を代入して

$$9a+3(-3a+5)+(2a-3)=16$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a=2}$$

よって③, ④より $\boldsymbol{b=-1}$, $\boldsymbol{c=1}$.

(3) $y=ax^2+bx+c$ のグラフは直線 $x=-2$ に関して対称だから, $ax^2+bx+c$ を平方完成すると

$$ax^2+bx+c=a(x+2)^2+d \quad \cdots\cdots ⑤$$

という形になるはずである. ⑤の右辺を展開すると

$$ax^2+4ax+(4a+d)$$

となるから, $b=4a$ でなければならない. よって③と連立して, $a=\dfrac{5}{7}$, $b=\dfrac{20}{7}$ さらに, ④より $c=-\dfrac{11}{7}$.

$x$の係数を比較した.

ゆえに, $f(-1)=a-b+c=\boldsymbol{-\dfrac{26}{7}}$.

## B.105

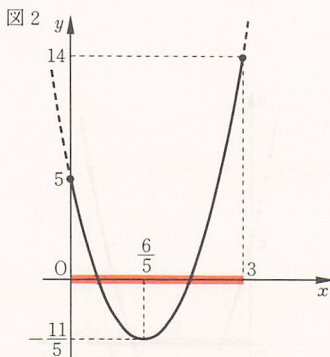
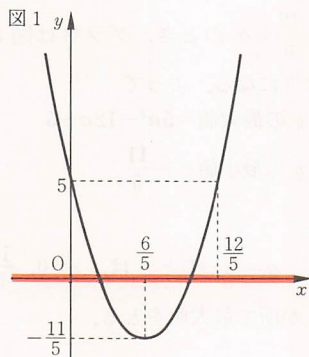
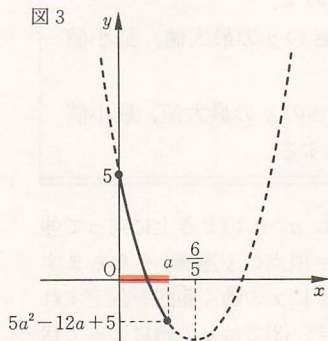
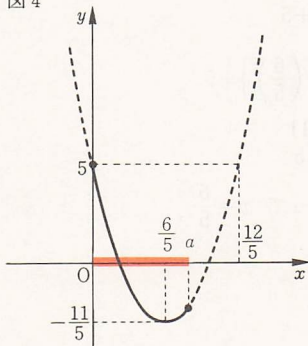
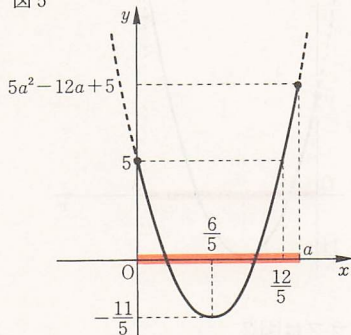
2 次関数 $y=5x^2-12x+5$ に対し,
(1) グラフを描き, $y$ の最小値を求めよ.
(2) $x$ が $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲を動くときの $y$ の最大値, 最小値を求めよ.
(3) $x$ が $0 \leqq x \leqq a$ の範囲を動くときの $y$ の最大値, 最小値を求めよ. ただし $a$ は正の定数とする.

**アプローチ** $y=ax^2+bx+c$ のグラフは, $a>0$ のとき上に向って伸びて行く放物線ですから, $y$ は最小値 (＝頂点の $y$ 座標) をもちますが, 最大値はありません. しかし(2)のように $x$ の動く範囲を限定すれば, 最小値と最大値をもつようになります. (3)では $a$ の値によって状況が変わります.

**解答** (1) $5x^2-12x+5=5\left(x^2-\frac{12}{5}x\right)+5$

$$=5\left\{\left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2\right\}+5$$

$$=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$$

よってグラフは図 1 のようになる. よって $x=\frac{6}{5}$ のとき, $y$ は最小値 $\boldsymbol{-\frac{11}{5}}$ をとる.

(2) $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲に限定すると, グラフは図 2 のようになる.

すなわち，$y$ は，$x=\frac{6}{5}$ のとき最小値 $-\frac{11}{5}$ を，$x=3$ のとき最大値 **14** をとる．

**(3)** (i) $0<a\leqq\frac{6}{5}$ のとき，グラフは図 3 のようになる．よって

$y$ の最大値$=\mathbf{5}$

$y$ の最小値$=\mathbf{5a^2-12a+5}$

次に $\frac{6}{5}<a$ の場合を考える．図 1 において，グラフは直線 $x=\frac{6}{5}$ に関して対称で，点 $(0,\ 5)$ を通る．よって，直線 $x=\frac{6}{5}$ に関して点 $(0,\ 5)$ と対称な点 $\left(\frac{12}{5},\ 5\right)$ を通ることに注意する．

(ii) $\frac{6}{5}<a\leqq\frac{12}{5}$ のとき，グラフは図 4 のようになる．よって

$$\begin{cases} y \text{ の最大値}=\mathbf{5} \\ y \text{ の最小値}=-\mathbf{\frac{11}{5}} \end{cases}$$

(iii) $\frac{12}{5}<a$ のとき，グラフは図 5 のようになる．よって

$$\begin{cases} y \text{ の最大値}=\mathbf{5a^2-12a+5} \\ y \text{ の最小値}=-\mathbf{\frac{11}{5}} \end{cases}$$

$a=\frac{12}{5}$ のときは，$x=0,\ \frac{12}{5}$ の 2 か所で最大値をとる．

## B.106

$a$を実数の定数として，2次関数 $f(x)=x^2-2ax-2$ を考える．

(1) $x$が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲を動くときの$f(x)$の最小値 $g(a)$を求め，そのグラフを描け．

(2) さらに$a$が $0\leqq a\leqq 2$ の範囲を動くときの$g(a)$の最大値，最小値を求めよ．

**アプローチ** $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=a$ に関して対称です．この直線が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲に属するか否かで状況が変ります．$g(a)$のグラフを描けば最大値も最小値も読み取れます．

**解答** (1) $f(x)=(x-a)^2-a^2-2$

であるから，対称軸 $x=a$ と $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲の位置関係に注目して場合分けする．

(i) $a<-1$ のとき，$y=f(x)$ のグラフを $-1\leqq x\leqq 1$ に限定して描くと図1のようになる．すなわち，$f(x)$は $x=-1$ のとき最小値 $f(-1)=2a-1$ をとるので

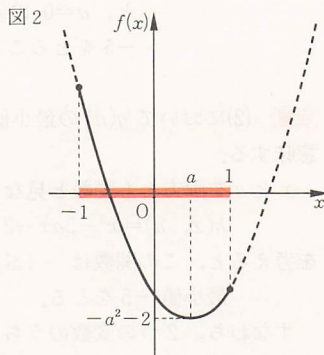
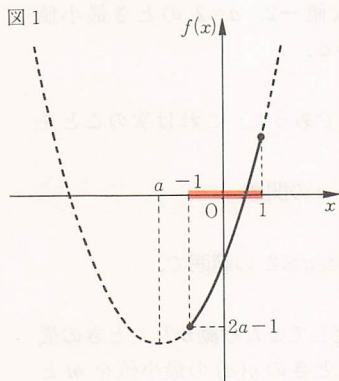
◀ "$a\leqq -1$ のとき" としてもよい．

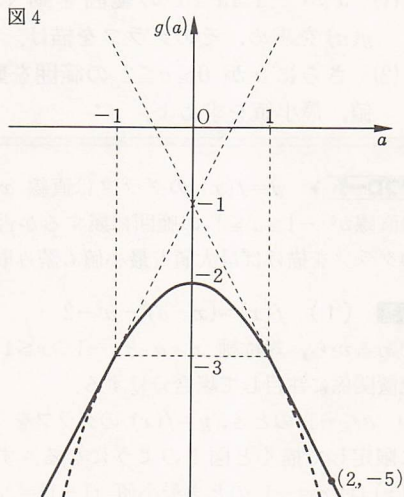
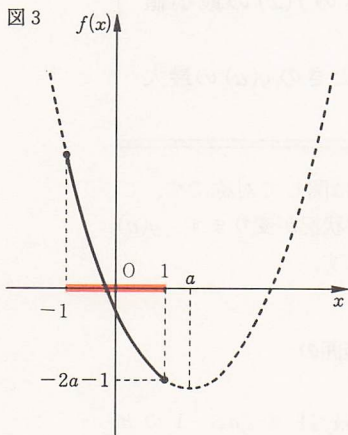
$$g(a)=f(-1)=2a-1$$

(ii) $-1\leqq a\leqq 1$ のとき，グラフは図2のようになる．すなわち$f(x)$は $x=a$ のとき最小値をとり，

$$g(a)=f(a)=-a^2-2$$

図1

図2

(iii)　$1<a$ のとき，グラフは図 3 のようになる．すなわち，$f(x)$ は $x=1$ のとき最小値をとり，

$$g(a)=f(1)=-2a-1$$

以上により

$$g(a)=\begin{cases} 2a-1 & a<-1 \text{ のとき} \\ -a^2-2 & -1\leqq a\leqq 1 \text{ のとき} \\ -2a-1 & 1<a \text{ のとき} \end{cases}$$

となる (図 4)．

**(2)**　図 4 のグラフを，$0\leqq a\leqq 2$ の範囲に限定すると，$a=0$ のとき最大値 **$-2$**，$a=2$ のとき最小値 **$-5$** をとることが分かる．

注意　(2)において $g(a)$ の最小値は $-5$ であった．これは次のことを意味する．

$x$ と $a$ を両方とも変数と見なし，$x$ と $a$ の関数

$$h(x,\ a)=x^2-2ax-2$$

を考えると，この関数は $-1\leqq x\leqq 1$，$0\leqq a\leqq 2$ の範囲で，

最小値 $-5$ をとる．

すなわち，2 つの変数のうち $a$ を固定して $x$ だけ動かしたときの最小値を $g(a)$ とし，さらに $a$ を動かしたときの $g(a)$ の最小値を $m$ とすると，$m$ は $h(x,\ a)$ の最小値となる．

## B.107

$a$ を実数の定数として，2 次関数 $f(x)=x^2-4x+a$ を考える．

(1)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を求めよ．

(2)　上の結果を利用して 2 次方程式 $f(x)=0$ が実根をもつ条件，重根を持つ条件を求めよ．

**アプローチ**　方程式 $f(x)=0$ の実根は，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の共有点の $x$ 座標です．2 交点が一致すると接点となり，重根を与えます．したがって，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸が共有点をもつか，またその共有点が接点かどうかを調べれば，方程式 $f(x)=0$ が実根をもつか，またその根が重根であるかどうかが分かります．

**解答**　(1)　2 次関数 $f(x)$ を平方完成すると

$$f(x)=(x-2)^2+a-4$$

となるから，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標は，

**$(2,\ a-4)$** である．

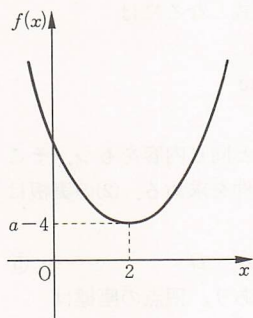
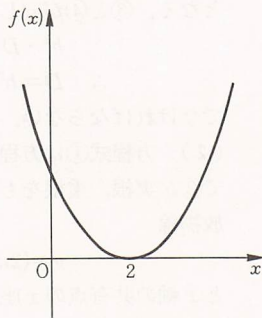
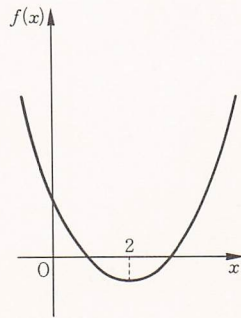
(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点と $x$ 軸の位置関係に注意して，グラフを描く．

頂点 $(2,\ a-4)$ は

$a>4$ ならば $y>0$ の部分にあり，

$a=4$ ならば $x$ 軸上にあり，

$a<4$ ならば $y<0$ の部分にある．

よって $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる．

よって 2 次方程式 $f(x)=0$ が実根をもつ条件は

**$a\leqq 4$**，重根をもつ条件は **$a=4$** である．

## B.108

$a$，$b$，$c$ を実数，$a \neq 0$ として，２次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) 方程式①を

$$(2ax+b)^2-D=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

という形に変形し，定数$D$を $a$，$b$，$c$ で表せ．

(2) 方程式①が実根をもつ条件，重根をもつ条件を求めよ．

(3) 方程式①が実根をもつとき，その実根を $a$，$b$，$c$ で表せ．

**アプローチ** ２次方程式には根の公式（解の公式）があります．また実根や重根をもつ条件は(1)の$D$を用いて表現できます．この$D$を“判別式”と言い，根の公式の中にも現われます．方程式①の実根は，$y=ax^2+bx+c$ のグラフと $x$ 軸の交点の $x$ 座標ですが，計算を易しくするために①を②のように書き換えて，$y=(2ax+b)^2-D$ という関数のグラフを考えるのです．この右辺はすでに平方完成されていますから，B.107 と同様にして(2)を考えることができます．さらにこの平方完成された形は，(3)で根を求めるのにも便利です．

**解答** (1) ②の左辺を展開する．

$$4a^2x^2+4abx+b^2-D=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

一方，①の両辺に $4a$ をかけると

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

となる．③と④が同じ方程式となるには

$$b^2-D=4ac$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

でなければならない．

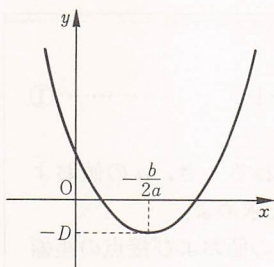
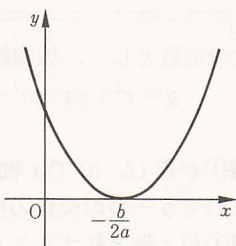
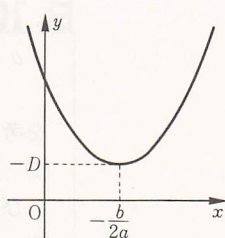
(2) 方程式①は方程式②と同じ内容をもつ．そこで②が実根，重根をもつ条件を求める．②の実根は放物線

$$y=(2ax+b)^2-D \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

と $x$ 軸の共有点の $x$ 座標であり，頂点の座標は

$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -D\right)$ である．

実根，重根をもつ条件を求めるには $y$ 座標 $-D$ が大切．

そこで$D$の符号について場合分けをして⑤のグラフを描く．

よって，⑤が実根をもつ条件は $\boldsymbol{D \geqq 0}$ であり，重根をもつ条件は $\boldsymbol{D=0}$ である．

(３)　②より

$$(2ax+b)^2=D$$

$D \geqq 0$ のとき，上式は

$$2ax+b=\pm\sqrt{D}$$

を意味するから，$b$ を移項し

$$2ax=-b\pm\sqrt{D}$$

両辺を $2a$ で割って

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}} \quad \cdots\cdots⑥$$

を得る．

(１)の別解　①の両辺に $4a$ をかけると

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

よって

$$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$$

$$\therefore \quad (2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$

となる．よって $D=b^2-4ac$ である．

◀ $(2ax+b)^2$ $=4a^2x^2+4abx$ $+b^2$ を考えて，$4a$ をかける．

注意　⑥すなわち

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

は２次方程式①の根を与える公式である．もしも $b^2-4ac>0$ なら上式は異なる２つの実数を表し，$b^2-4ac=0$ なら，ただ一つの値 $-\frac{b}{2a}$ (重根) を表す．

## B.109

$a$ を実数の定数として，放物線

$$y=x^2+ax-a^2+2a+1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

(1)　放物線①が点 $(2,\ 0)$ で $x$ 軸と交わるとき，$a$ の値および $x$ 軸とのもう一つの交点の座標を求めよ．

(2)　放物線①が $x$ 軸と接するとき，$a$ の値および接点の座標を求めよ．

(3)　放物線①が点 $(t,\ 2)$ を通るような $a$ の値がただ一つ存在するという．このような $t$ の値を求めよ．

**アプローチ**　放物線①と2次方程式

$$x^2+ax-a^2+2a+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

の間に次のような対応関係があります（☞B.107，B.108）．

①と $x$ 軸の共有点 ⟷ ②の実根 （〝判別式〟 $D\geqq 0$）

①と $x$ 軸の接点　 ⟷ ②の重根 （〝判別式〟 $D=0$）

また(1)，(3)で $a$ の値を求めるときは，②を $a$ についての方程式と見なすことが必要になります．どの文字についての方程式を考えているのか，いつもはっきりしていなければなりません．

**解答**　（1）　放物線①は点 $(2,\ 0)$ を通るから

$$0=4+2a-a^2+2a+1$$

①に $x=2$, $y=0$ を代入した．

$$\therefore\quad a^2-4a-5=0$$

$$\therefore\quad (a+1)(a-5)=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-1,\ 5}$$

$a=-1$ のとき，放物線①と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は

$$x^2-x-2=0$$

$$\therefore\quad (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=-1,\ 2$$

となり，$(2,\ 0)$ 以外の交点は $\boldsymbol{(-1,\ 0)}$ である．

また $a=5$ のとき，放物線①と $x$ 軸の交点の $x$ 座標は

$$x^2+5x-14=0$$

$$\therefore\quad (x+7)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=-7,\ 2$$

となり，$(2,\ 0)$ 以外の交点は $\boldsymbol{(-7,\ 0)}$ である．

(２)　放物線①が$x$軸と接する条件は，２次方程式

$$x^2+ax-a^2+2a+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が重根をもつことである．判別式は

$$D=a^2-4(-a^2+2a+1)$$
$$=5a^2-8a-4$$

であるから，重根をもつ条件 $D=0$ は

$$5a^2-8a-4=0$$
$$\therefore \quad (a-2)(5a+2)=0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{a=2,\ -\frac{2}{5}}$$

である．

$a=2$ のとき，③は

$$x^2+2x+1=0$$
$$\therefore \quad (x+1)^2=0 \qquad \therefore \quad x=-1$$

となり，接点は$(\mathbf{-1,\ 0})$である．

$a=-\dfrac{2}{5}$ のとき，③は

$$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=0$$
$$\therefore \quad \left(x-\frac{1}{5}\right)^2=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{5}$$

となり，接点は$\left(\boldsymbol{\frac{1}{5},\ 0}\right)$である．

(３)　放物線①が$(t,\ 2)$を通る条件は

$$2=t^2+at-a^2+2a+1$$
$$\therefore \quad a^2-(t+2)a-t^2+1=0$$

◁これを$a$についての方程式と見る．

これが$a$の２次方程式として重根をもつ条件は

$$\text{判別式}=(t+2)^2-4(-t^2+1)$$
$$=5t^2+4t$$
$$=0$$

である．すなわち

$$(5t+4)t=0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{t=-\frac{4}{5},\ 0.}$$

## B.110

$a$，$b$ を実数の定数として，2 次方程式

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) 方程式①が 2 根 3，$-2$ をもつように $a$，$b$ の値を定めよ．

(2) 方程式①が 2 根 $\alpha$，$\beta$ をもつような $a$，$b$ を $\alpha$，$\beta$ で表せ．ただし $\alpha$，$\beta$ は異なる実数とする．

(3) 方程式①が重根 2 をもつように $a$，$b$ の値を定めよ．

**アプローチ** B.109 では放物線がある一点を通るという条件から $a$ の値を定めました．上の(1)は $x$ 軸と交わる 2 つの点を与えて $a$ と $b$ を定めようとしています．(2)も同様です．(3)は(1)，(2)とどう違うか，またどう関連しているか，そこがおもしろい所です．

**解答** (1) $x=3$ が①を満たすことから

$$9+3a+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

（放物線 $y=x^2+ax+b$ が点 (3，0) で $x$ 軸と交わると言ってもよい．）

また $x=-2$ が①を満たすことから

$$4-2a+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

②，③から $a$，$b$ を求める．②−③ より

$5+5a=0$　　∴　$\boldsymbol{a=-1}$.

よって，②から　$\boldsymbol{b=-6}$.

(2) $x=\alpha$ が①を満たすことから

（(1)と同じことをする．）

$$\alpha^2+\alpha a+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

$x=\beta$ が②を満たすことから

$$\beta^2+\beta a+b=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④，⑤から $a$，$b$ を求める．④−⑤ より

（これは因数分解できる．）

$$\alpha^2-\beta^2+\alpha a-\beta a=0$$

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)a=0$$

$$\therefore \quad (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+a)=0$$

ここで $\alpha \neq \beta$ であるから

$\alpha+\beta+a=0$　　∴　$\boldsymbol{a=-\alpha-\beta}$.　$\cdots\cdots\cdots$ ⑥

よって，④から

$$\alpha^2+\alpha(-\alpha-\beta)+b=0$$

∴　$-\alpha\beta+b=0$　　∴　$\boldsymbol{b=\alpha\beta}$.　$\cdots\cdots\cdots$ ⑦

(3)　$x=2$ が①を満たすことから

$$4+2a+b=0 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

◁もう一つ式が必要だが…….

また①が重根をもつことから

$$判別式=a^2-4b=0 \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧，⑨から $a$，$b$ を求める．⑧より

$$b=-2a-4 \qquad \cdots\cdots ⑩$$

これを⑨に代入して

$$a^2-4(-2a-4)=0$$

$$\therefore\quad a^2+8a+16=0$$

$$\therefore\quad (a+4)^2=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=-4}.$$

よって，⑩から　$\boldsymbol{b=4}$.

注意　(2)の結果⑥，⑦に $\alpha=3$，$\beta=-2$ を代入すると，$a=-1$，$b=-6$ となり，当然ながら，(1)の結果と一致する．

研究　(3)で考えた状況は，(2)で言えば $\alpha=\beta=2$ の場合に当る．しかし(2)では $\alpha\neq\beta$ という仮定が必要だったから，⑥，⑦に $\alpha=\beta=2$ を代入してもだめである．それでも，試みに代入してみると，$a=-4$，$b=4$ となり，(3)の結果に一致する．これは(2)，(3)を統一的に扱う方法があることを示唆している．

実際(2)には次のような別解があり，$\alpha\neq\beta$ という仮定を必要としない．したがって(2)の結果⑥，⑦に $\alpha=\beta=2$ を代入することが正当化されるのである．

(2)の別解　方程式①が2根 $\alpha$，$\beta$ をもつとは，$x^2+ax+b$ が次のように因数分解されることを意味する．

$$x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)$$

◁ $\alpha=\beta$ のときも正しい．

右辺を展開し

$$x^2+ax+b=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

係数を比較すると

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=-(\alpha+\beta)} \\ \boldsymbol{b=\alpha\beta} \end{cases}$$

◁解と係数の関係 A1.7

を得る．

## B.111

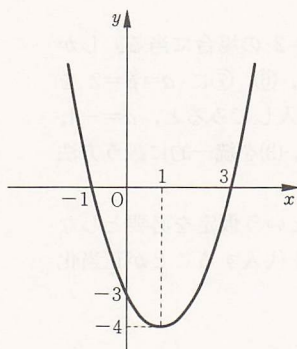
不等式 $(x+1)(x-3)>0$ を満たす $x$ の範囲を，次の 2 つの方法で求めよ．

(1) $y=(x+1)(x-3)$ のグラフを描く．

(2) 実数 $A$，$B$ に対し，条件 $AB>0$ は

$$A,\ B>0 \quad \text{または} \quad A,\ B<0$$

と同等であることを利用する．

**アプローチ** 英語では「分かる」ということを「見る」と言いますが，言葉でくどくど言われるより，絵を描いて見せられた方がずっと分かりやすいという経験を誰でも持っているでしょう．しかし一方で，このような直観的理解は，それを論理的に裏づけることによって，いっそう深いものになるということも事実です．(1)は直観的に，(2)は論理的に 2 次不等式にアプローチします．

**解答** (1) $y=(x+1)(x-3)$ のグラフは，$x=-1$，$3$ で $x$ 軸と交わり，また $(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$$=(x-1)^2-4$$

であるから，頂点の座標は $(1,\ -4)$ である．よって $y>0$ であるような $x$ は

$$\boldsymbol{x<-1} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{3<x}$$

である．

(2) $A$，$B$ の符号と $AB$ の符号の関係は下の表のとおりである．

| $A$ | 0 | 0 | ± | ＋ | ＋ | − | − |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 0 | ± | 0 | ＋ | − | ＋ | − |
| $AB$ | 0 | 0 | 0 | ＋ | − | − | ＋ |

すなわち，「$AB>0$」と「$A$，$B>0$ または $A$，$B<0$」は同等である．したがって

$$(x+1)(x-3)>0 \quad \text{は}$$

$$x+1,\ x-3>0 \text{ または } x+1,\ x-3<0$$

と同等である．よって

「$x>-1$ かつ $x>3$」または「$x<-1$ かつ $x<3$」

$\therefore$ $\boldsymbol{x>3}$ または $\boldsymbol{x<-1}$ を得る．

## B.112

次の不等式を解け.

(1)　$-x^2+3x-2<0$　　(2)　$2x^2+4x+1\leqq 0$

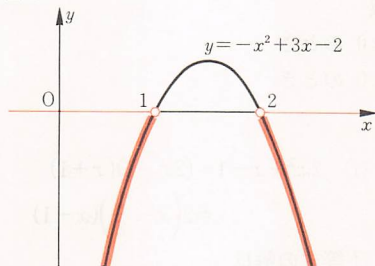
**アプローチ**　B.111 のどちらの方法をとるにせよ，方程式
$-x^2+3x-2=0$ や $2x^2+4x+1=0$ を解いておく必要があります.

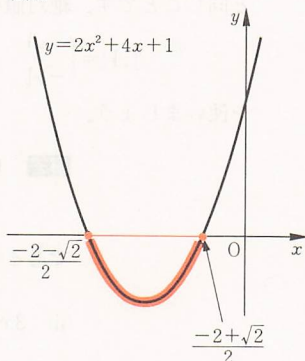
**解答**　(1)　$y=-x^2+3x-2$ のグラフを描く.

$$-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2)$$

であるから，$x$ 軸との交点は $x=1,\ 2$ である.

図 1

図 2

グラフは図 1 のようになり，不等式の解は

$$\boldsymbol{x<1}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{2<x}$$

(2)　方程式 $2x^2+4x+1=0$ の解は

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$$

であるから，$y=2x^2+4x+1$ のグラフは $x$ 軸と 2 点 $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ で交わる (図 2). よって，不等式の解は

$$\boldsymbol{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\leqq x\leqq\frac{-2+\sqrt{2}}{2}}$$

である.

◁ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ☞B.108

**注意**　B.111 の解答中の表を見れば

「$AB<0$」は「$A<0<B$ または $B<0<A$」と同等

「$AB\leqq 0$」は「$A<0<B$ または $B<0<A$ または $A=0$ または $B=0$」

と同等であることがわかる. これを用いて上の結果を論理的に裏づけることができる.

## B.113

(1) 次の不等式を解け．

(i) $2x^2+x-1\geqq 0$ (ii) $3x^2-2x-5\geqq 0$

(2) 上の結果を利用して次の不等式を解け．

$$|2x^2+x-1|-|3x^2-2x-5|\geqq 0$$

**アプローチ** 絶対値を恐れる必要はありません．もしも

$$2x^2+x-1\geqq 0 \quad かつ \quad 3x^2-2x-5\geqq 0$$

を満たす $x$ の範囲に限定するならば，(2)の不等式は

$$(2x^2+x-1)-(3x^2-2x-5)\geqq 0$$

と同じことです．絶対値の定義

$$|A|=\begin{cases} A & A\geqq 0 \text{ のとき} \\ -A & A<0 \text{ のとき} \end{cases}$$

を使いましょう．

**解答** **(1)** (i) $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$

$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)$$

であるから，不等式の解は

$$\boldsymbol{x\leqq -1} \text{ または } \boldsymbol{x\geqq \frac{1}{2}}.$$

(ii) $3x^2-2x-5=(3x-5)(x+1)$

$$=3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+1)$$

であるから不等式の解は

$$\boldsymbol{x\leqq -1} \text{ または } \boldsymbol{x\geqq \frac{5}{3}}.$$

**(2)** (1)と同様にして

$2x^2+x-1<0$ の解は $-1<x<\frac{1}{2}$

$3x^2-2x-5<0$ の解は $-1<x<\frac{5}{3}$

であることがわかる．

$x=-1$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{3}$ を境い目として次のように $x$ の範囲を分割して，$2x^2+x-1$，$3x^2-2x-5$ の符号を調べる．

| | $x<-1$ | $x=-1$ | $-1<x<\frac{1}{2}$ | $x=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}$ | $x=\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}<x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2+x-1$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $3x^2-2x-5$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |

$f(x)=|2x^2+x-1|-|3x^2-2x-5|$　とおく.

1°　$x \leqq -1$ のとき

$$f(x)=(2x^2+x-1)-(3x^2-2x-5)$$
$$=-x^2+3x+4$$
$$=-(x-4)(x+1)$$

よって $f(x) \geqq 0$ の解は

$$-1 \leqq x \leqq 4 \ (\text{かつ}\ x \leqq -1)$$

$\therefore\ x=-1$ ……… ①

◁ $x \leqq -1$ の範囲だけで考えている.

2°　$-1<x<\dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(x)=-(2x^2+x-1)+(3x^2-2x-5)$$
$$=x^2-3x-4$$
$$=(x-4)(x+1)$$

◁ $A<0$ のとき $|A|=-A$

よって $f(x) \geqq 0$ の解は

$$x \leqq -1 \ \text{または}\ 4 \leqq x \left(\text{かつ}\ -1<x<\frac{1}{2}\right)$$

となり，このような$x$は存在しない.

3°　$\dfrac{1}{2} \leqq x<\dfrac{5}{3}$ のとき

$$f(x)=(2x^2+x-1)+(3x^2-2x-5)$$
$$=5x^2-x-6$$
$$=(x+1)(5x-6)$$

よって $f(x) \geqq 0$ の解は

$$x \leqq -1 \ \text{または}\ \frac{6}{5} \leqq x \left(\text{かつ}\ \frac{1}{2} \leqq x<\frac{5}{3}\right)$$

$\therefore\ \dfrac{6}{5} \leqq x<\dfrac{5}{3}$ ……… ②

4°　$\dfrac{5}{3} \leqq x$ のとき，1°と同様に

$$f(x)=-(x-4)(x+1)$$

よって $f(x) \geqq 0$ の解は

$$-1 \leqq x \leqq 4 \left(\text{かつ}\ \frac{5}{3} \leqq x\right)$$

$\therefore\ \dfrac{5}{3} \leqq x \leqq 4$ ……… ③

①，②，③より，$f(x) \geqq 0$ の解は

$$\boldsymbol{x=-1}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{\frac{6}{5} \leqq x \leqq 4}$$

である.

◁ ②，③は1つにつながって，$\dfrac{6}{5} \leqq x \leqq 4$ となる.

## B.114

$$f(x)=x^2+(a+1)x-2a^2+1$$

とおく．ただし $a$ は実数の定数である．

(1)　2 次不等式 $f(x)\geqq 0$ がすべての実数 $x$ に対して成立するような $a$ の範囲を求めよ．

(2)　2 次不等式 $f(x)\leqq 0$ を満たす実数 $x$ が存在するような $a$ の範囲を求めよ．

**アプローチ**　不等式 $f(x)\geqq 0$ や $f(x)\leqq 0$ は，$y=f(x)$ のグラフと $x$ 軸の位置関係によって解の様子が変ります．特に放物線 $y=f(x)$ の頂点の $y$ 座標が重要ですが，いわゆる判別式 (B.108) を利用することもできます．

判別式は
$(a+1)^2$
$\quad -4(-2a^2+1)$
$=9a^2+2a-3$

**解答**　$f(x)=(x^2+(a+1)x)-2a^2+1$

$$=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-2a^2+1$$

$$=\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(9a^2+2a-3)$$

よって放物線 $y=f(x)$ の頂点の $y$ 座標は，$-\frac{1}{4}(9a^2+2a-3)$ であり，放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸の位置関係は左図のように 3 つの場合がある．

**(1)**　すべての $x$ に対して $f(x)\geqq 0$ が成立するということは，$y=f(x)$ のグラフが㋐または㋑のようになっているということである．よって

$$-\frac{1}{4}(9a^2+2a-3)\geqq 0$$

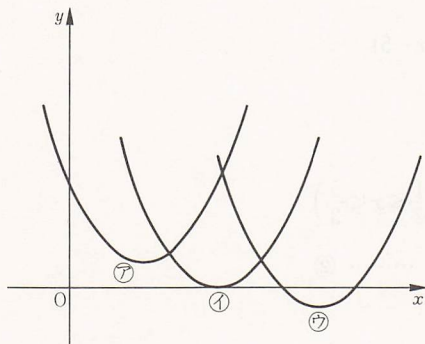
$$\therefore\quad 9a^2+2a-3\leqq 0$$

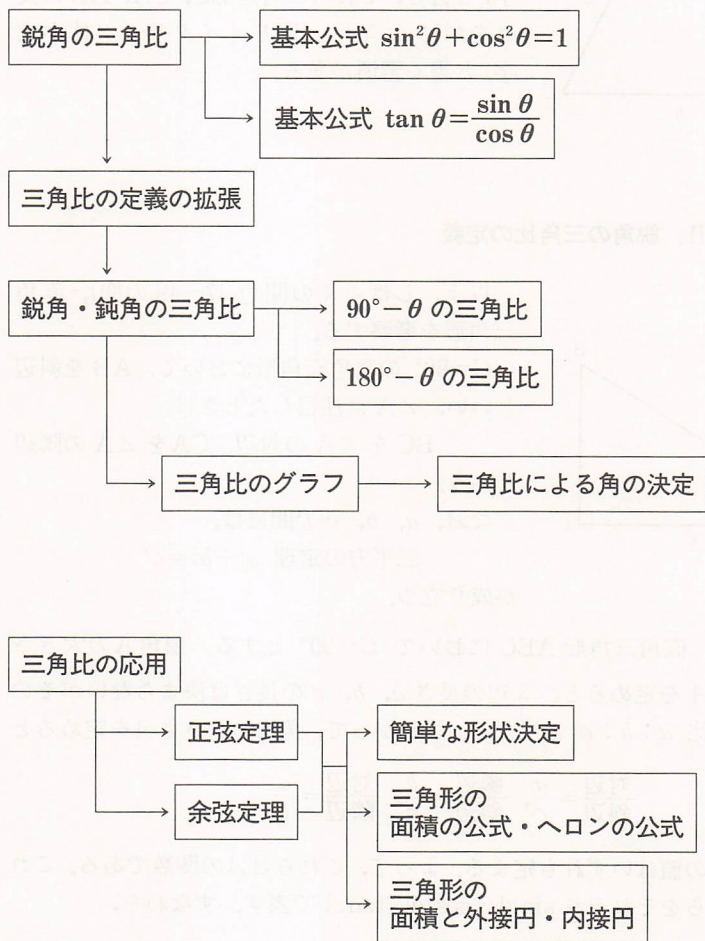
$9a^2+2a-3=0$ の解は
$a=$
$\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 9\cdot 3}}{18}$
$=\frac{-2\pm 4\sqrt{7}}{18}$
$=\frac{-1\pm 2\sqrt{7}}{9}$

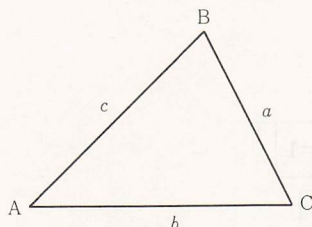
$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{-1-2\sqrt{7}}{9}\leqq a\leqq\frac{-1+2\sqrt{7}}{9}}.$$

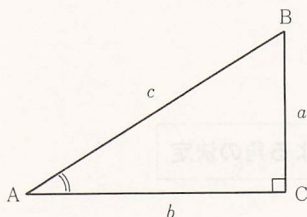
**(2)**　$y=f(x)$ のグラフが㋑または㋒のようになっていればよいので，

$$-\frac{1}{4}(9a^2+2a-3)\leqq 0 \qquad \therefore\quad 9a^2+2a-3\geqq 0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a\leqq\frac{-1-2\sqrt{7}}{9}}\quad \text{または}\quad \boldsymbol{a\geqq\frac{-1+2\sqrt{7}}{9}}.$$

# §2 図形と計量

## キー・ワード　（A基礎理論篇）

# A2.1　三角比

## I．三角形の記号

△ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさを単に $A$，$B$，$C$（印刷ではイタリック体大文字）と書き，それらの対辺 BC，CA，AB の長さを単に $a$，$b$，$c$（同じくイタリック体小文字）と書く習慣がある．

## II．鋭角の三角比の定義

以下，しばらくの間（$p$.47〜49 の間），直角三角形を考察する．

$C=90°$ の直角三角形において，AB を斜辺といい，∠A に注目したときは，

BC を ∠A の対辺，CAを ∠A の隣辺

という．

なお，$a$，$b$，$c$ の間には，

三平方の定理 $a^2+b^2=c^2$

が成り立つ．

直角三角形 ABC において $C=90°$ とする．頂角Aの大きさ $A$ を定めると，3辺の長さ $a$，$b$，$c$ の長さは決まらないがその比 $a:b:c$ は決まる．したがって，角Aの大きさ $A$ を定めると

$$\frac{対辺}{斜辺}=\frac{a}{c},\ \frac{隣辺}{斜辺}=\frac{b}{c},\ \frac{対辺}{隣辺}=\frac{a}{b}$$

の値はいずれも定まる．よって，これらは $A$ の関数である．これらをそれぞれ $\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ で表す．すなわち，

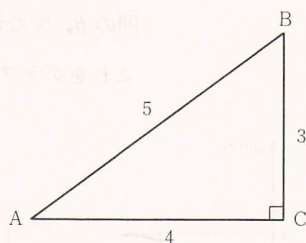
$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b}$$

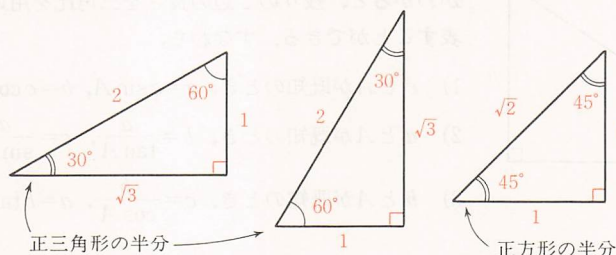
と定義する．

1°　$\sin A$ を $A$ の **正弦** , $\cos A$ を $A$ の **余弦**, $\tan A$ を $A$ の **正接** という.

　また, 正弦, 余弦, 正接をまとめて **三角比** という.

2°　例　右図のような直角三角形では

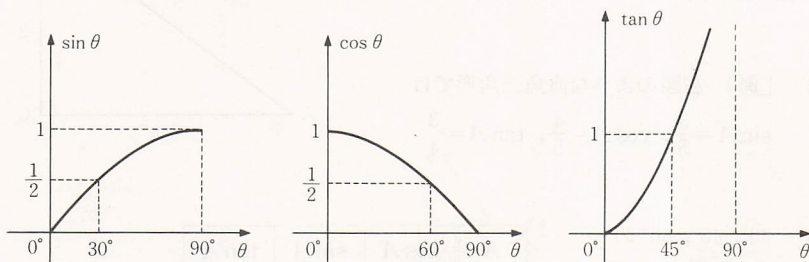
$\sin A=\dfrac{3}{5}$, $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\tan A=\dfrac{3}{4}$

3°　30°, 45°, 60° の三角比は簡単な値である. これらは下図を用いればただちに求められる.

| $A$ | $\cos A$ | $\sin A$ | $\tan A$ |
|---|---|---|---|
| 30° | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 45° | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 |
| 60° | $\dfrac{1}{2}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

4°　上に示した角度以外の角度の三角比の値, たとえば, sin10° などの値は簡単には計算できない.

　これらの値は, やや高級な数学の理論に基き, コンピュータを利用して近似値が計算され, その結果が表になっている. これが三角関数表(ふつう, 教科書の付録に簡単なものがついている)である.

　最近は, たとえば, (1) (0) (sin) と“キー”を押すだけで, 瞬時に, このような近似値を表示する電卓(関数電卓)も(お金を出せば)簡単に手に入れることができる.

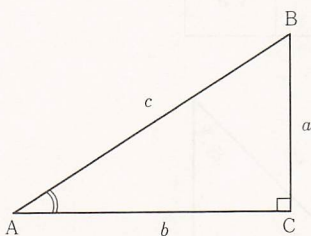
5°　以上で，角 $\theta$ の三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ が，$0<\theta<90°$ の範囲の $\theta$，すなわち鋭角 $\theta$ に対し定義された．

これをグラフで示すと次のようになる．

実は，後に述べるように，鈍角に対しても，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値が考えられる．　ガイド　☞ A2.2

6°　$C=90°$ となる直角三角形において，

「いずれか１辺の長さ」と

「直角以外のもう１つの頂角」

がわかると，残りの２辺の長さを三角比を用いて表すことができる．すなわち，

1)　$c$ と $A$ が既知のとき，$a=c\sin A$，$b=c\cos A$

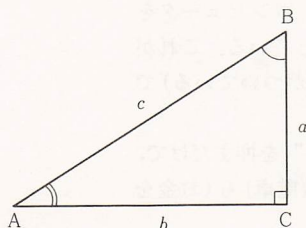
2)　$a$ と $A$ が既知のとき，$b=\dfrac{a}{\tan A}$，$c=\dfrac{a}{\sin A}$

3)　$b$ と $A$ が既知のとき，$c=\dfrac{b}{\cos A}$，$a=b\tan A$

## Ⅲ．三角比相互の関係

下図のような $C=90°$ の直角三角形 ABC において，定義により

$$\left.\begin{aligned}\sin A&=\frac{a}{c}=\cos B\\ \cos A&=\frac{b}{c}=\sin B\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots①,$$

$$\tan A=\frac{a}{b}\quad\cdots\cdots②$$

であり，また

$$A+B=90°　\cdots\cdots ③$$
$$a^2+b^2=c^2　\cdots\cdots ④$$

が成り立つ．

これから，次の公式が得られる．

三角比の基本公式

［公式］

1)　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

2)　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

3)　$\sin A=\cos(90°-A)$,
　　$\cos A=\sin(90°-A)$

1°　上の公式において，$\sin^2 A$ とは $(\sin A)^2$ の意味である．
$\cos^2 A$ なども同様．

2°　1) は①，④から，2) は①，②から，3) は①，③からそれぞれ導かれる．

また，1) と 2) を使うと，

$$\tan^2 A+1=\frac{1}{\cos^2 A}$$

という公式が得られる．

これらの公式は，$A$ が鋭角の場合以外にも成立する．

☞ A2.2

3°　鋭角の三角比においては，上記の公式 1)，2)，3) によって，正弦，余弦，正接のうちどれか 1 つの値が定まると残りも定まる．

例　たとえば，$\sin 10°$ の値は簡単にはわからないが，それを $a$ とおけば，

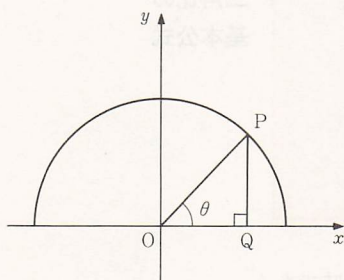
$\cos^2 10°=1-\sin^2 10°=1-a^2$

$\cos 10°>0$ であるから，$\cos 10°=\sqrt{1-a^2}$

また，$\tan 10°=\dfrac{\sin 10°}{\cos 10°}=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

4°　上記の 3) も使えば，0°～45° の正弦，または余弦の表があれば，0°～90° の正弦，余弦，正接が求められることになる．

# A2.2 三角比の拡張

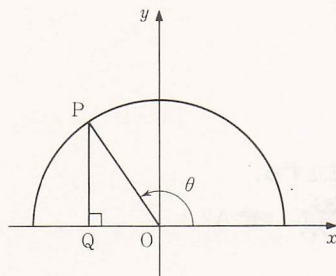
## I．90°≦θ≦180° の三角比

直角三角形を用いて鋭角の三角比を定義したが，座標を用いて三角比を定義しなおそう．

原点を中心とする半径 $r$ の円を書く．また，与えられた鋭角 $\theta$ に対して，$x$ 軸の正の向きと角 $\theta$ をなす半径 OP を書く．

P から $x$ 軸に垂線 PQ を引くと，直角三角形 OPQ において，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}},\ \sin\theta=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OP}},\ \tan\theta=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{OQ}}$$

となる．よって，P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

そこで，鈍角の場合も含めて，0°≦$\theta$≦180° の範囲の角 $\theta$ に対して，上の①式によって

$$\cos\theta,\ \sin\theta,\ \tan\theta$$

を定義するのである．

1°　例　$\theta=120°$ のとき，半径を2として書けば $\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ となる．

よって，

$$\cos 120°=-\frac{1}{2},\ \sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 120°=-\sqrt{3}$$

2°　円の半径を1にとれば（このような原点を中心とする半径1の円のことを **単位円** という）

$$x=\cos\theta,\qquad y=\sin\theta$$

ということになる．

3°　新しい定義によれば，$\theta=0°, 90°, 180°$ という特別な角に対しては，右のようになる．

$\tan 90°$ の値は存在しない．

| $\theta$ | $\cos\theta$ | $\sin\theta$ | $\tan\theta$ |
|---|---|---|---|
| $0°$ | 1 | 0 | 0 |
| $90°$ | 0 | 1 | ＼ |
| $180°$ | $-1$ | 0 | 0 |

4°　$0°\leqq\theta\leqq180°$ としても次の基本公式が成立する．

［公式］ 1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2)　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　3)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

**三角比の基本公式**

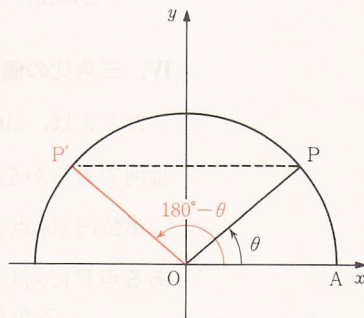
## Ⅱ．$180°-\theta$ の三角比

$180°-\theta$ の三角比と $\theta$ の三角比との間には次の公式が成り立つ．

［公式］ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

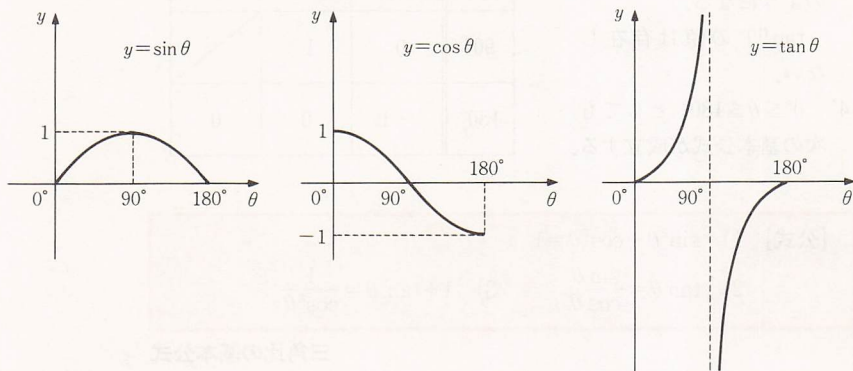
$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

1°　証明　右図のように $\angle AOP=\theta$ なる点 P $(x, y)$ をとり，$y$ 軸に関して P と対称な点を $P'(-x, y)$ とすると，$\angle AOP'=180°-\theta$ となる．よって上記の公式は，三角比の定義①から明らかに成立する．

2°　鈍角の三角比は，この公式によって，鋭角の三角比から求めることができる．

3°　$0°<\theta<90°$ では $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値はすべて正である．

しかし，$90°<\theta<180°$ のときには $\sin\theta>0$ であるが，$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$ となる．

### Ⅲ. 三角比のグラフ

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ における $\theta$ と $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ との関係を示すグラフは，次のようになる．

1°　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲の角に対する $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値の範囲は

$$0 \leqq \sin\theta \leqq 1, \qquad -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$$

であり，$\tan\theta$ はあらゆる実数値をとる．

2°　$90° < \theta < 180°$ では，$\theta$ が増すと $\sin\theta$ の値は減少する

$0° < \theta < 180°$ では，$\theta$ が増すと $\cos\theta$ の値は減少する

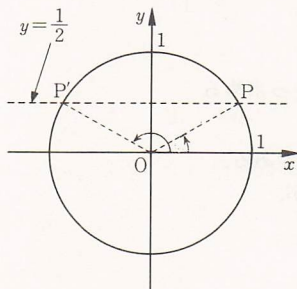
ことに注目しよう．

### Ⅳ. 三角比の値から角を求める

たとえば，$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ であるが，逆に $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる角 $\theta$ は何であるかを考えてみよう．ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

単位円（原点を中心とする半径1の円）周上で，$y$ 座標が $\dfrac{1}{2}$ である点Pに対し，半径OPと $x$ 軸の正方向とのなす角が $\theta$ であるから，求める $\theta$ は

$$\theta = 30°,\ 150°$$

となる．

1°　$0 \leqq c < 1$ を満たす $c$ の値が1つ与えられたとき

$$\sin\theta = c, \qquad ただし, \qquad 0° \leqq \theta \leqq 180°$$

をみたす $\theta$ の値は2つあって，それを $\alpha$，$\beta$ とすると

$$\alpha + \beta = 180°$$

が成り立つ．

$c=1$ のときは $\alpha=\beta$ $(=90^\circ)$ である．

2°　余弦，正接について同様の考察をすると，次のようになる．

$-1\leqq c\leqq 1$ をみたす $c$ の値が1つ与えられると

$\cos\theta=c$，　ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$

をみたす $\theta$ の値は，つねに1つだけ存在する．

任意の実数値 $c$ を1つ定めると，

$\tan\theta=c$，　ただし，　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$

をみたす $\theta$ の値は，

1)　$c\neq 0$　ならば，1つだけ存在し，それは $90^\circ$ ではない．

2)　$c=0$　ならば，$\theta=0^\circ$，$180^\circ$ である．

これは，IIIで述べたグラフを見ることによっても納得することができる．

## A2.3 三角形と三角比

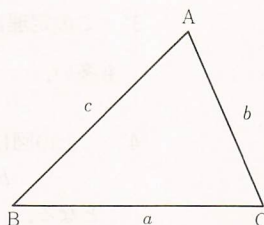
### I．基本関係

まず，△ABC において

$0^\circ<A<180^\circ$，$0^\circ<B<180^\circ$，$0^\circ<C<180^\circ$

$A+B+C=180^\circ$

$a>0$，$b>0$，$c>0$

$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$

### II．正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

ただし，$R$ は外接円の半径

1°　この定理は，もともと

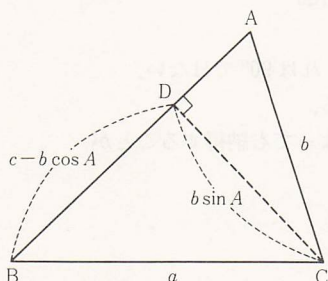
$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

に由来する．また

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

のように利用する場合もある．

## III. 余 弦 定 理

[定理]　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

1°　$A$ が鋭角の場合，左図で △BCD にピタゴラスの定理を用い

$$(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=a^2$$

この式を整理すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

が得られる．

2°　$A=90°$ のときは,ピタゴラスの定理

$$a^2=b^2+c^2$$

となる．

よって，余弦定理はピタゴラスの定理の一般化と考えることができる．

3°　この定理は $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ のように書き改めて使うことも多い．

4°　上の図において，AD$=b\cos A$，BD$=a\cos B$ であるから

$$b\cos A+a\cos B=c$$

となる．

この関係式も(第１)余弦定理と呼ぶことがある．

## IV. 三角形の面積の公式

[公式]　△ABC の面積を $S$ とすると

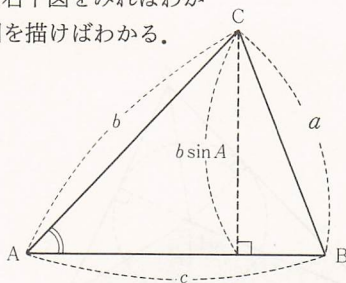
1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$

2)　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

ただし，$2s=a+b+c$

1°　公式 1) の 証明：　$A$ が鋭角のときには，右下図をみればわかる．$A$ が鈍角，または 90° のときも同様に図を描けばわかる．

2°　上の 2) を **ヘロンの公式** という．
三角形の 3 辺がわかっているとき，その面積を与える公式である．

証明については☞ B.215

3°　上の公式 1) から

$$bc\sin A = ca\sin B,\quad \therefore\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

このように，正弦定理に現れる関係

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

が，公式 1) から導かれる．

## V．三角形の外接円，内接円の半径

**外接円の半径**

［公式］　△ABC の外接円の半径を $R$，面積を $S$ とすると

$$R = \frac{abc}{4S}$$

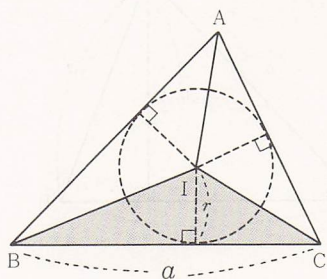
1°　正弦定理より $R = \dfrac{a}{2\sin A}$，面積の公式より $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

この 2 式から $\sin A$ を消去して得られるのがこの公式である．

**内接円の半径**

［公式］　△ABC の内接円の半径を $r$ とすると

$$r = \frac{S}{s}$$

ただし，
$S$ は △ABC の面積，$2s = a + b + c$

2°　証明：内接円の中心 I と 3 頂点とを結んで △ABC を 3 つの三角形に分割する．すると，△IBC の辺 BC に対する高さは，内接円の半径 $r$ であるから

$$2\triangle\mathrm{IBC}=ar$$

△ICA，△IAB についても同様である．

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{IBC}+\triangle\mathrm{ICA}+\triangle\mathrm{IAB}$$

から

$$2S=ar+br+cr=2sr$$

が得られる．

## VI．三角形の形状決定

たとえば，

「△ABC の辺と角の間に

$$a\cos A=b\cos B$$

が成り立つとき，

△ABC とはどんな形の三角形か？」

といった問題を，三角形の形状決定問題という．

1°　このタイプの問題を解くには，正弦定理，余弦定理を用いて，辺のみ，または，角のみを含む関係式を作ると都合のよいことが多い．

具体例については，☞B.216，217

——A 2　おわり——

*Repos*

## 「明らか」について

数学では「明らか」という表現をよく使います。普通「明らか」といったら，“疑う余地のない”“明白な”という意味であると受けとると思いますが，数学では，大体の場合

証明することはできるが，とりわけ難しい着想を必要としないのでいちいち丁寧に述べるまでもない

という意味で使います。この“明らか”に対応する英語は，clear ではなく trivial です。clear と区別するために，trivial を「自明な」と訳すこともあります。わざわざ他から根拠を探してこなくとも自(おのず)から明らかである，というわけです。

やる気になれば誰でもできる自明な証明を与えることは，学問研究の立場から見れば，“くだらない”ことですから，trivial には，このような否定的ニュアンスが含まれます。

20世紀を代表する数学者であるアンドレ・ヴェイユは，セミナーのコメントとして次の３つの句しか発しなかったといわれます。

「それは，まちがっている」，「それは私がもうやった」，「それは trivial である」

「$p$ または $q$ または $r$ である」という文は「$p$ でないかつ $q$ でないならば $r$ である」という文と同じ意味をもっていますから，ヴェイユの態度は，

「まちがっていない　しかも　私がまだやっていないことは，trivial である」

と主張していることになります。天才ヴェイユの自信を物語る逸話です。

ところで高校生諸君が「明らか」という表現をつかうときは，「きっとこの命題は正しいだろうが，その根拠を何と説明したらいいかわからない」という意味のようですね。もちろん，これは，正しい使い方とはいえません。

## B.201

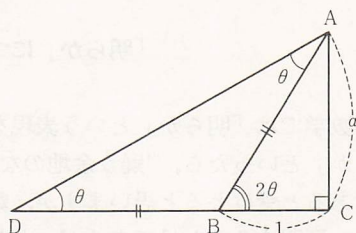
(1)　$0° < \theta < 45°$

なる $\theta$ に対して,

$$\tan 2\theta = a$$

とおく.

右図を利用して

$\tan\theta$ を $a$ で表せ.

(2)　$\tan 15°$ の値を求めよ.

**アプローチ**　正接 (tan) の定義を思い出せば，知るべきはCDの長さです.

**解答**　(1)　$BD = AB = \sqrt{a^2+1}$

$$\therefore\quad DC = \sqrt{a^2+1}+1$$

$$\therefore\quad \tan\theta = \frac{AC}{DC}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}+1}$$

分母の有理化 ▶

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{a^2+1}-1}{a}}.$$

(2)　$\theta = 15°$ とおくと,

$$a = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるので，(1)の結果より,

$$\tan 15° = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}+1}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$$

となる.

[注]　(1)で得られた結果を $a$ について解けば,「数学II」で学ぶ倍角公式の1つ

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

が導かれる.

## B.202

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ として次のものを求めよ．

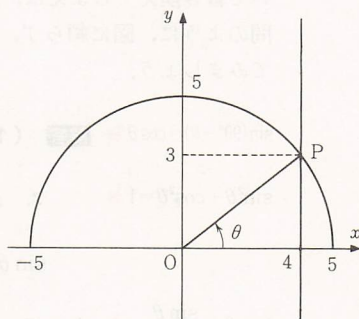
(1)　$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ のときの，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

(2)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のときの，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

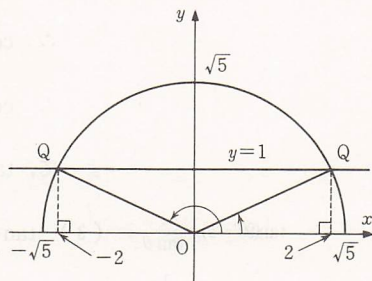
**アプローチ**　拡張された三角比の定義の復習です．(1)では，原点中心の半径5，(2)では $\sqrt{5}$ の半径の円を描いて考えるのが良いでしょう．

**解答**　(1)　原点を中心とする半径5の半円と，直線 $x=4$ との交点をPとすると，動径OPに向って $x$ 軸の正の方向から測った角が $\theta$ である．点Pの座標が(4，3)であることから，

$$\sin\theta = \frac{3}{5}, \quad \tan\theta = \frac{3}{4}$$

となる．

(2)　原点を中心とする半径 $\sqrt{5}$ の半円と直線 $y=1$ との交点をQとすると，動径OQの $x$ 軸からの回転角が $\theta$ である．そのような点Qは2か所あり，その座標が(±2，1)であることから

$$\cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \tan\theta = \pm\frac{1}{2}$$

となる．　(複号同順)

[注]　$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のどれか1つの値がわかれば，基本公式

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

により，他の値も符号を除いて確定する．しかし数Ⅰでは $0° \leqq \theta \leqq 180°$ という制限があるので，$\sin\theta$ の値は，つねに，$\sin\theta \geqq 0$ である．

## B.203

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として，次のものを求めよ．

(1)　$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{4}{5}$ のときの，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

(2)　$\sin(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{3}$ のときの，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

(3)　$\tan(90^\circ-\theta)=-2$ のときの，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値

**アプローチ**　$90^\circ-\theta$ や $180^\circ-\theta$ の三角比の公式（☞ p.49，51）を用いて書き換えてしまえば，前問 B.202 と変わりません．ここでは，前問のように，図に頼らず，その基本公式（☞ B.202（注））だけを用いてみましょう．

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ ▶ **解答**　**(1)**　$\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{4}{5}$ より，$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ▶　$\therefore\ \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

$\sin\theta\geqq 0$　ゆえ　$\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$.

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ▶ よって，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$.

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ ▶ **(2)**　$\sin(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{3}$ より，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$\therefore\ \cos\theta=\pm\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$.

よって，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.　（複号同順）

$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ ▶ **(3)**　$\tan(90^\circ-\theta)=-2$ より，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ ▶　$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\sin\theta>0$ ▶ ここで，$\tan\theta<0$ より，$\cos\theta<0$ であるので，

$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$.

よって，

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.

## B.204

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ……①　のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\sin\theta\cos\theta$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3)　$\sin^4\theta+\cos^4\theta$

**アプローチ**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ という恒等的関係を利用する有名な古典問題です．

**解答**　**(1)**　①の両辺を平方して，恒等的関係 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると，

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}. \quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

**(2)**　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$　◀ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$.

これに，①，②を代入して，

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\mathbf{\frac{11}{16}}.$$

**(3)**　$\sin^4\theta+\cos^4\theta$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$　◀ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=1-2(\sin\theta\cos\theta)^2$.

これに，②を代入して

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\left(-\frac{3}{8}\right)^2=\mathbf{\frac{23}{32}}.$$

[注]　1°　本問は，“$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$ かつ $\alpha^2+\beta^2=1$ のとき　(1) $\alpha\beta$　(2) $\alpha^3+\beta^3$　(3) $\alpha^4+\beta^4$　の値を求めよ”という問題と，実質的に同じである．

2°　$a=\sin\theta$，$b=\cos\theta$ とおくと，(2)，(3)ではそれぞれ

$$a^3+b^3=(a^2+b^2)(a+b)-ab(a+b)$$
$$a^4+b^4=(a^3+b^3)(a+b)-ab(a^2+b^2)$$

と変形しても解決する．さらに，この関係式は，

$$a^n+b^n=(a^{n-1}+b^{n-1})(a+b)-ab(a^{n-2}+b^{n-2})$$

と一般化できる．

## B.205

$0°\leqq\theta\leqq180°$ として次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\sin\theta=\frac{1}{2}$　(2)　$\sin\theta\geqq\frac{1}{2}$　(3)　$\cos\theta<-\frac{1}{2}$

**アプローチ**　拡張された三角比の定義に戻ることにより，簡単な三角方程式，不等式を解いてみましょう．

**解答**　(1)　単位円と直線 $y=\frac{1}{2}$ の交点と原点Oとを結ぶ動径の $x$ 軸からの回転角が，与えられた方程式を満たす．その交点は，2つあり

$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

である．A，Bから $x$ 軸に下した垂線の足をそれぞれA′，B′とすると，

$\angle\mathrm{AOA'}=\angle\mathrm{BOB'}=30°$

であるので，求める角 $\theta$ は

$$\boldsymbol{\theta=30°}\ \text{または}\ \boldsymbol{\theta=150°}.$$

(2)　(1)の図で，単位円の $y\geqq\frac{1}{2}$ の部分にある点Pに対して，動径OPの $x$ 軸からの回転角 $\theta$ が与えられた不等式を満たすべきである．

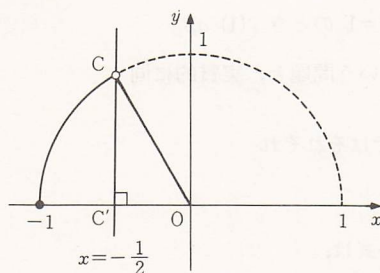
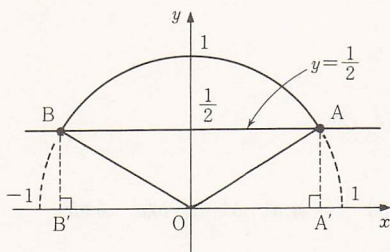
よって，求める角 $\theta$ の値の範囲は

$$\boldsymbol{30°\leqq\theta\leqq150°}.$$

(3)　単位円と直線 $x=-\frac{1}{2}$ との交点は1つで，$\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である．

左図で，$\angle\mathrm{COC'}=60°$ であるので，単位円の $x<-\frac{1}{2}$ の部分に対応する角 $\theta$ の値の範囲として，

$$\boldsymbol{120°<\theta\leqq180°}$$

を得る．

## B. 206

正方形ABCDの辺BC上に $\angle BAP=\theta(0°<\theta<45°)$ となるように点Pをとると，$AP=a$ となったという．さらに，Bを通りAPに垂直な直線とAP，DCの交点をそれぞれQ，Rとするとき，次のものを $a$ と $\theta$ で表せ．

(1) BQ　　(2) PQ

(3) △PQRの面積 $S_1$　　(4) □PCRQの面積 $S_2$

**アプローチ** 図を描けば，直ちに $\triangle ABP \backsim \triangle BQP$，$\triangle ABP \equiv \triangle BCR$ が分かります．

**解答** (1) $AB=AP\cos\theta=a\cos\theta$ より，

$BQ=AB\sin\theta=\boldsymbol{a\cos\theta\sin\theta}$.

(2) $\triangle ABP \backsim \triangle BQP$ より $\angle QBP=\theta$

$\therefore\ PQ=BQ\tan\theta$

$=a\cos\theta\sin\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\boldsymbol{a\sin^2\theta}$.

(3) $\triangle ABP \equiv \triangle BCR$ より，

$BR=AP=a$

$\therefore\ QR=BR-BQ$

$=a(1-\cos\theta\sin\theta)$

$\therefore\ S_1=\dfrac{1}{2}PQ\cdot QR$

$=\boldsymbol{\dfrac{a^2}{2}\sin^2\theta(1-\cos\theta\sin\theta)}$.

(4) $\begin{cases} PC=BC-BP=a(\cos\theta-\sin\theta) \\ RC=BP=a\sin\theta \end{cases}$

より，△RPCの面積 $S_3$ は

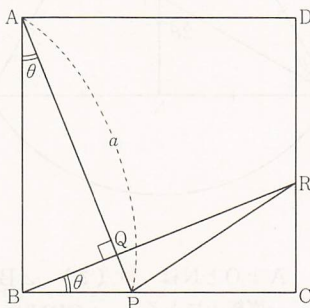
$S_3=\dfrac{1}{2}PC\cdot RC=\dfrac{a^2}{2}\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)$

となる．よって，求める面積 $S_2$ は

$S_2=S_1+S_3$

$=\dfrac{a^2}{2}\sin\theta\{\sin\theta(1-\cos\theta\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta\}$

$=\dfrac{a^2}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\sin^2\theta)$

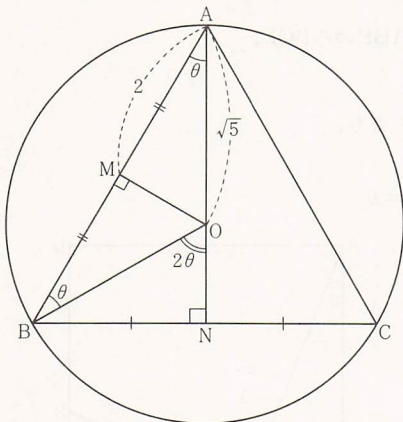
$=\boldsymbol{\dfrac{a^2}{2}\sin\theta\cos^3\theta}$.

◀ △BQPと△BCRの相似比 $BP:BR=\sin\theta:1$ に注目して，$S_2=\triangle BCR\times(1-\sin^2\theta)$ とするのも効率が良い．

◀ $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

## B.207

AB＝AC＝4，∠BAC＝$2\theta$ ($0°<\theta<45°$) の 2 等辺三角形 ABC が半径 $\sqrt{5}$ の円に内接している．このとき，次のものを求めよ．

(1) $\sin\theta$　(2) BC　(3) $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$

**アプローチ▶** 中学で学んだ円の幾何学的性質を用います．

**解答** **(1)** 円の中心Oから AB に下した垂線の足Mは，辺 AB の中点であるので，

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{5-4}=1$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{OM}{OA}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

**(2)** OからBCに下した垂線の足Nは，辺BCの中点であるので，

$$\begin{aligned}BC&=2BN\\&=2AB\sin\theta\\&=2\cdot4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{5}}}.\end{aligned}$$

AとOとNは一直線上にある．

**(3)** ∠BON＝∠BAO＋∠ABO＝$2\theta$ であるので，△OBN に注目すると

$$\sin 2\theta=\frac{BN}{OB}=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{4}{5}}.$$

また，$ON=\sqrt{OB^2-BN^2}$

$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$ より，

$$\cos 2\theta=\frac{ON}{OB}=\frac{\frac{3}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}.$$

［注］ 後に学ぶ公式（正弦定理，余弦定理，また，数学Ⅱの三角関数の公式）を用いれば，上と異なる求め方が考えられる．

## B. 208

$\angle A=45°$，$\angle B=60°$，BC$=2$ である $\triangle ABC$ において，次のものを求めよ．

(1) AC　(2) AB　(3) $\sin 75°$

**アプローチ** 正弦定理，余弦定理の基本的な使い方の練習です．

**解答** **(1)** 正弦定理により，

$$\frac{2}{\sin 45°}=\frac{AC}{\sin 60°}$$

$$\therefore\quad AC=\frac{2\sin 60°}{\sin 45°}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}.$$

**(2)** AB$=x$ とおき，余弦定理を用いると，

$$AC^2=x^2+BC^2-2x\cdot BC\cos 60°$$

$$\therefore\quad 6=x^2+4-2x$$

$$\therefore\quad x^2-2x-2=0$$

となり，$x>0$ であることから

$$x=AB=\boldsymbol{1+\sqrt{3}}$$

を得る．

**(3)** $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=75°$ であるので，再び正弦定理を用いると，

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sin 75°}=\frac{2}{\sin 45°}$$

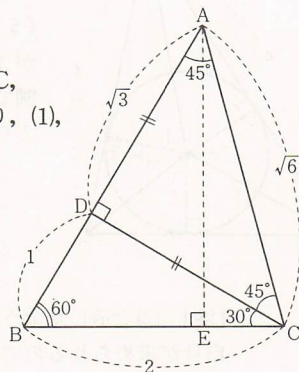
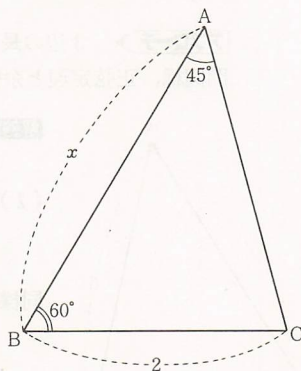
$$\therefore\quad \sin 75°=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}.$$

[注] C から AB に垂線 CD を下すと，$\triangle ADC$，$\triangle DBC$ はともによく知られた直角三角形となり，(1)，(2)の結果は直ちに得られる．

また，A から BC に垂線 AE を下せば，

$$AE=AB\sin 60°=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad \sin 75°=\frac{AE}{AC}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

も得られる．

## B.209

△ABCにおいて，$a=\mathrm{BC}=5$，$b=\mathrm{CA}=6$，$c=\mathrm{AB}=7$ のとき，次のものを求めよ．

(1)　$\sin A : \sin B : \sin C$　　(2)　$\cos A : \cos B : \cos C$

(3)　△ABCの面積 $S$　　(4)　外接円の半径 $R$

(5)　内接円の半径 $r$

**アプローチ**　3辺の長さが決まれば，三角形は1つに決まります．前問同様，正弦定理と余弦定理の確認です．

**解答**　(1)　正弦定理から，

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \mathbf{5 : 6 : 7}.$$

(2)　余弦定理から，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7} = \frac{5}{7}$$

同様にして，

$$\cos B = \frac{19}{35},\quad \cos C = \frac{1}{5}$$

となるので，

$$\cos A : \cos B : \cos C = \mathbf{25 : 19 : 7}.$$

(3)　$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

B.215のヘロンの公式を用いることもできる．▶

$$\therefore\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7} = \mathbf{6\sqrt{6}}.$$

(4)　正弦定理から，

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{5}{2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \mathbf{\frac{35\sqrt{6}}{24}}.$$

(5)　△ABCの内心をIとすると，△ABCが3つの三角形△AIB，△BIC，△CIAに分割できる．それらの面積の和を考えることにより，次の関係を得る．

$$\frac{a+b+c}{2}\cdot r = S$$

$$\therefore\quad r = \frac{2S}{5+6+7} = \mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}.$$

［注］　(2)で示したように $\cos A$，$\cos B$，$\cos C$ の比だけではなく，値自身が求められるのであるから，$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ の値も確定する．

## B. 210

△ABC において，辺 BC の中点を M とおく．△ABM, △AMC に余弦定理を適用することにより，

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　［パッポスの中線定理］

が成り立つことを証明せよ．

**アプローチ**　いろいろな方法で証明できる中線定理を，余弦定理を利用して証明しようというものです．$\angle AMB=\theta$ とおくと，$\angle AMC=180°-\theta$ となることに注目しましょう．

**解答**　$\angle AMB=\theta$ とおき，△ABM において余弦定理を用いると，

$AB^2=AM^2+BM^2-2AM\cdot BM\cos\theta$ …… ①

となる．

一方，$\angle AMC=180°-\theta$ であるので，△AMC において余弦定理を用いると，

$AC^2=AM^2+MC^2-2AM\cdot MC\cos(180°-\theta)$

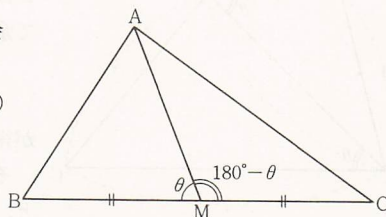
$\therefore$　$AC^2=AM^2+BM^2+2AM\cdot BM\cos\theta$ …… ②

となる．

◀ $\begin{cases} MC=BM \\ \cos(180°-\theta)=-\cos\theta \end{cases}$

よって，①+②から，証明すべき等式

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

が得られる．■

**別解**　△ABM, △ABC が ∠B を共有することに注目して余弦定理を用いると，

$$\cos B=\frac{AB^2+BM^2-AM^2}{2AB\cdot BM}$$

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

◀ $BC=2BM$

$$=\frac{AB^2+4BM^2-AC^2}{4AB\cdot BM}$$

となり，これらが等しいことから，

$$\frac{AB^2+BM^2-AM^2}{2AB\cdot BM}=\frac{AB^2+4BM^2-AC^2}{4AB\cdot BM}$$

$\therefore$　$2(AB^2+BM^2-AM^2)=AB^2+4BM^2-AC^2$

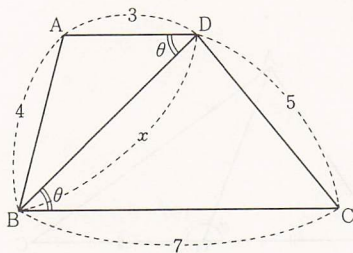
◀ 分母を払った．

$\therefore$　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

を得る．■

## B.211

AD∥BC である台形 ABCD において，
　AB=4，BC=7，CD=5，DA=3　であるという．
対角線 BD の長さを求めよ．

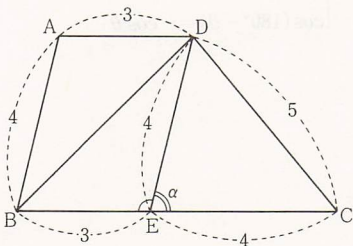
**アプローチ**　いろいろな方法が考えられますが，いずれにせよ，AD∥BC という条件を積極的に利用することになります．

**解答**　BD=$x$，∠ADB=$\theta$ とおくと，∠DBC=$\theta$ となるので，△ABD，△DBC において余弦定理を用いると，

$$\begin{cases} 4^2=x^2+3^2-2\cdot3\cdot x\cos\theta & \cdots\cdots ① \\ 5^2=x^2+7^2-2\cdot7\cdot x\cos\theta & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が得られる．

　そこで，①×7−②×3を作り $\cos\theta$ を消去すると，

$$4x^2=121$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{121}{4}}=\mathbf{\frac{11}{2}}.$$

（別解1）　D を通り AB に平行な直線と BC との交点を E とし，∠DEC=$\alpha$ とおくと，

　∠BED=180°−$\alpha$ であるので，△DEC，△BED において余弦定理を用いれば，

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{4^2+4^2-5^2}{2\cdot4\cdot4}=\dfrac{7}{32} & \cdots\cdots ① \\ BD^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos(180^\circ-\alpha) & \\ \qquad=25+24\cos\alpha & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

前問 B.210 と同じ角のとり方．

となる．

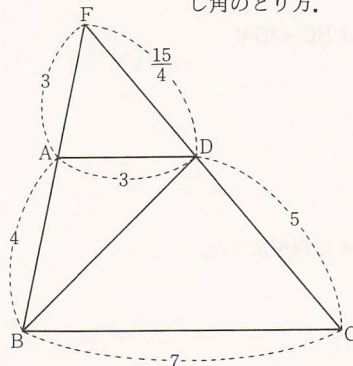
　よって，①を②に代入すれば，

$$BD^2=25+24\cdot\frac{7}{32}=\frac{121}{4}\quad\therefore\quad BD=\mathbf{\frac{11}{2}}.$$

（別解2）　AB，CD の延長の交点を F とおくと，

　△FAD∽△FBC であることから

$$FA=3,\ FD=\frac{15}{4}\ \text{が分かる．}$$

よって，△FAD，△FBD が∠F を共有することに注目し，両者で余弦定理を適用すればよい．

## B.212

AB=3, BC=4, CA=2 の △ABC で ∠A の 2 等分線と BC との交点をDとおく．

(1) BD の長さを求めよ．

(2) AD の長さを求めよ．

**アプローチ** 初等幾何の定理を覚えていれば，(1)は簡単です．それを忘れた人のために正弦定理を用いても解決できることを示しましょう．また，$\cos B$ の値がわかるのですから，BD がわかれば，AD を知るのもたやすいはずです．

**解答** **(1)** $\angle BAD=\angle CAD=\alpha$,
$\angle ADB=\beta$ とおくと，正弦定理により，

$$\begin{cases} \dfrac{BD}{\sin\alpha}=\dfrac{AB}{\sin\beta} \\ \dfrac{CD}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin(180^\circ-\beta)} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} BD=AB\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ CD=AC\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\beta)} \end{cases}$$

である．ここで，

$$\sin(180^\circ-\beta)=\sin\beta$$

であることを用いると，

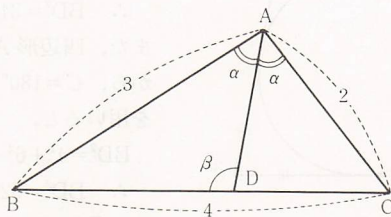
$$BD:CD=AB:AC=3:2$$

◁ 初等幾何の定理

が得られる．

$$BD+CD=BC=4$$

であったから，

$$BD=\frac{3}{3+2}\times 4=\mathbf{\frac{12}{5}}.$$

**(2)** 余弦定理を △ABC と △ABD に対して用いる．

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{9+16-4}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{7}{8}$$

$$\therefore\ AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$$

$$=9+\frac{144}{25}-2\cdot 3\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{54}{25}$$

$$\therefore\ AD=\sqrt{\frac{54}{25}}=\mathbf{\frac{3\sqrt{6}}{5}}.$$

## B. 213

AB=3, BC=4, CD=6 である四辺形 ABCD が，ある円に外接し，しかも，4頂点 A，B，C，D は同一周上にあるという．DA の長さ，および，$\cos A$ を求めよ．

**アプローチ** 四辺形 ABCD がある円に内接するのは $A+C=180°$ が成立するときでした．外接するのは，どんな条件が成り立つときだったでしょうか？

**解答** まず，四辺形 ABCD がある円に外接することから，

DA+BC=AB+CD が成り立つ．

∴　DA=AB+CD−BC=3+6−4=**5.**

次に，△ABD に余弦定理を用いると，

$$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos A$$

$$\therefore\quad BD^2=34-30\cos A \quad \cdots\cdots\ ①$$

また，四辺形 ABCD がある円に内接していることから，$C=180°-A$ であるので，△BCD に余弦定理を用いると，

$$BD^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cos(180°-A)$$

$$\therefore\quad BD^2=52+48\cos A \quad \cdots\cdots\ ②$$

②−① を作り，BD を消去すれば，

$$0=18+78\cos A \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\cos A=-\frac{3}{13}}$$

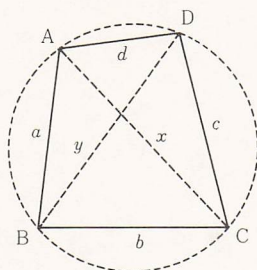
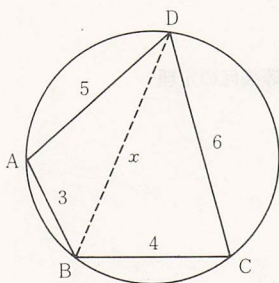
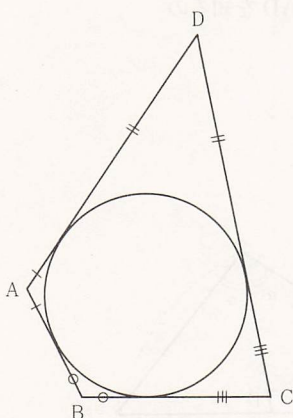
を得る．

**研究** 一般に，ある円に内接する四辺形 ABCD において，AC·BD=AB·CD+BC·DA という関係が成立する．これを示すには左図のように，$a$，$b$，$c$，$d$，$x$，$y$ を定め

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos B \quad \cdots\cdots\ ③$$

$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-B)$$
$$=c^2+d^2+2cd\cos B \quad \cdots\cdots\ ④$$

③×$cd$+②×$ab$ を作り，これから $\cos B$ を消去して，$(ab+cd)x^2=(ac+bd)(ad+bc)$ を導く．同様に $(ad+bc)y^2=(ac+bd)(ab+cd)$ が導かれる．あとは，両者をかけるだけである．

“プトレマイオス（通称 トレミー）の定理”

## B. 214

$\angle A=90°$, $\angle B=\theta$, $BC=a$ の直角三角形 ABC において，内接円の半径 $r$ を $a$ と $\theta$ で表せ．

**アプローチ** 内接円の半径といったら A2.3V，B.209 で学んだように面積を媒介にする方法(☞[注])がポピュラーですが，ここでは，$\angle A=90°$ であることに注目して，円の接線の性質を利用してみましょう．

**解答** △ABC の内接円の中心を I，内接円と 3 辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とおく．

円外の 1 点から円に引いた 2 接線の長さは等しいので，

$BD=x$，$DC=y$

とおくと，

$BF=x$，$CE=y$

となり，さらに，

$AE=AF=r$

◀□AFIE は正方形

であるので，

$$\begin{cases} AB=x+r=a\cos\theta & \cdots\cdots ① \\ AC=y+r=a\sin\theta & \cdots\cdots ② \\ BC=x+y=a & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．

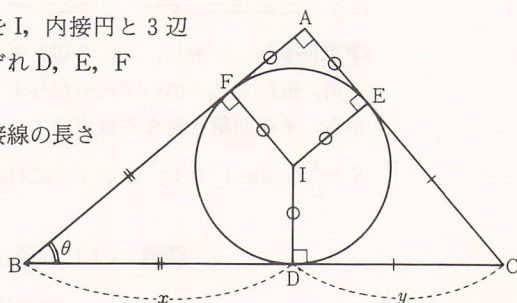
よって，①+②−③を作ることにより，

$$r=\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}(\cos\boldsymbol{\theta}+\sin\boldsymbol{\theta}-\mathbf{1})$$

を得る．

[注] 内接円の半径の公式 $S=r\cdot\dfrac{a+b+c}{2}$ (☞A2.3V，B.209) を用いると，

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC=r\cdot\frac{AB+AC+BC}{2}$$

$$\therefore\quad r=\frac{a\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}$$ となり上と見かけの異なる結果が得られる．(当然これでも正解!) この分母，分子に $\cos\theta+\sin\theta-1$ をかけて整理すれば，上の結果と一致することが分かる．

## B. 215

三角形の面積$S$が，次の式で与えられることを証明せよ．

(1)　1辺が$a$，その両端の角がB，Cのとき，

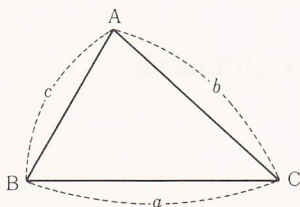
$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$$

(2)　3辺が$a$，$b$，$c$のとき，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$(2s=a+b+c)$　　[ヘロンの公式]

**アプローチ**　一般に，i）2辺とそのはさむ角，ii）1辺とその両端の角，iii）3辺，のいずれかが与えられると三角形は確定するのですから，その面積も定まるはずです．i）の場合の公式が，

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ です．ii)，iii) に対応する公式を導きましょう．

**解答**　(1)　正弦定理から $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$$\therefore\quad b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A},\qquad c=a\cdot\frac{\sin C}{\sin A}$$

これを，$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ に代入し，

$$\sin A=\sin\{180°-(B+C)\}=\sin(B+C)$$

を用いると，$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$ ．■

(2)　3辺の長さがわかっているので，$\sin A$が

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$

で与えられる．したがって，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

となる．ここで平方根の中味は，

$$\begin{aligned}&(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)\\&=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\&=(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)\\&=2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)\\&=16s(s-a)(s-b)(s-c)\end{aligned}$$

と変形される．したがって

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　　である．■

## B. 216

△ABC の辺と角の間に，次のおのおのの関係が成り立つとき △ABC はどんな形の三角形であるか．

(1) $2\sin B\cos C=\sin A$ ……… ①

(2) $a\cos A=b\cos B$ ……… ②

**アプローチ** 正弦定理，余弦定理を用いて，“辺のみ”または“角のみ”の関係式に変形するのが基本戦略．といっても，数Ⅰの範囲では，“辺に統一”した方が安全です．

**解答** (1) 正弦定理より，

$\sin A=ka$，$\sin B=kb$ ($k$ は正の定数)

と書ける．そこで，余弦定理を用いれば，①は

$$2kb\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=ka$$

◀辺だけの式になおせた．

と書きなおすことができる．よって，

$b^2=c^2$ ∴ $b=c$

となり，△ABC は **AB＝AC の二等辺三角形** である．

(2) 余弦定理を用いて，②を書き換えると，

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

∴ $a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

∴ $(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$

∴ $a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

となる．ゆえに，△ABC は，

**CB＝CA の二等辺三角形** または，**$\angle C=90°$ の直角三角形** である．

**研究** 「数学Ⅱ」で学ぶ三角関数の公式(加法定理)を用いると次のように“角の関係”に帰着させることができる．

(1) $A=180°-(B+C)$ より，一般に，

$\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$ なので，

① $\Longleftrightarrow \sin B\cos C-\cos B\sin C=0 \Longleftrightarrow \sin(B-C)=0$.

(2) $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$ ($R$ は △ABC の外接円の半径)を用いると，

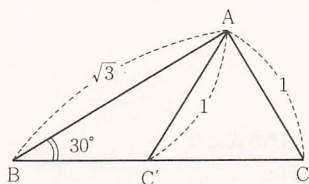
② $\Longleftrightarrow \sin A\cos A=\sin B\cos B \Longleftrightarrow \sin 2A=\sin 2B$.

## B. 217

△ABC において，

$$B=30^\circ,\quad \mathrm{CA}=1,\quad \mathrm{AB}=\sqrt{3}$$

であるという．辺 BC の長さと頂角 A，C の大きさを求めよ．

**アプローチ** 2 辺と 1 角が与えられたといっても，2 辺とそのはさむ角ではないので，三角形はただ 1 つに決まりません．

**解答** △ABC に正弦定理を用いると，

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=\frac{1}{\sin 30^\circ} \quad \therefore \quad \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$0^\circ<C<180^\circ$ だから，$C=60^\circ$ または $C=120^\circ$.

i） $C=60^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(B+C)=90^\circ$.

よって，$\mathrm{BC}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 30^\circ}=2$.

ii） $C=120^\circ$ のとき，$A=180^\circ-(B+C)=30^\circ=B$.

よって，$\mathrm{BC}=\mathrm{AC}=1$.

以上より，

**BC=2，$A=90^\circ$，$C=60^\circ$**

または，**BC=1，$A=30^\circ$，$C=120^\circ$**.

**別解** $\mathrm{BC}=a$ とおいて，

△ABC に余弦定理を用いると，

$$1^2=a^2+\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}\,a\cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad a^2-3a+2=0$$

$$\therefore \quad (a-1)(a-2)=0$$

$$\therefore \quad a=1 \text{ または } a=2.$$

i） **$a=1$** のとき，△ABC は

CA=CB の二等辺三角形

なので，

**$A=B=30^\circ$**.

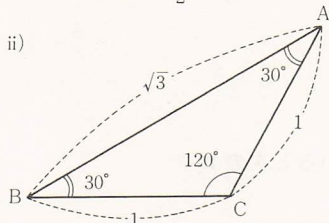
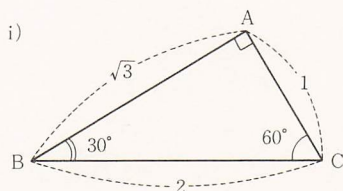
$\therefore \quad C=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=$ **$120^\circ$**.

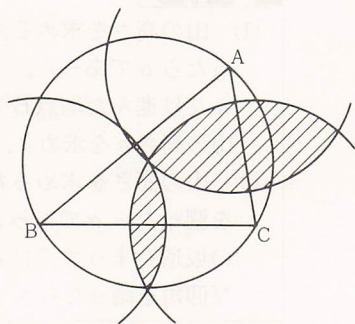
ii） **$a=2$** のとき，

$1^2+\sqrt{3}^2=2^2$ より △ABC は

**$A=90^\circ$** の直角三角形

なので，

**$C$**$=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=$**$60^\circ$**.

## B. 218

∠A＝60°, AB＝3, AC＝2 である△ABCにおいて，各頂点を中心とし，△ABCの外接円の半径を半径とする円を描く．この3つの円の2つずつの共通部分の面積の和を求めよ．

**アプローチ** 余弦定理からBCの長さが決まるので，正弦定理により，△ABCの外接円の半径$R$が分かります．

各頂点を中心とする半径$R$の3つの円は，△ABCの外心(外接円の中心)Iで交わり，2円の共通部分は，△ABCの辺によって2等分されます．そこで，△ABCと各円の共通部分の和に注目してみましょう．鮮やかに解決します！

**解答** 余弦定理により，

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 60^\circ$$
$$=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=7$$
$$\therefore\ BC=\sqrt{7}.$$

よって，正弦定理により，△ABCの外接円の半径$R$は，

$$R=\frac{BC}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

各頂点を中心とする半径$R$の円と△ABCの共通部分の面積の和$S_1$は，∠A＋∠B＋∠C＝180° より，

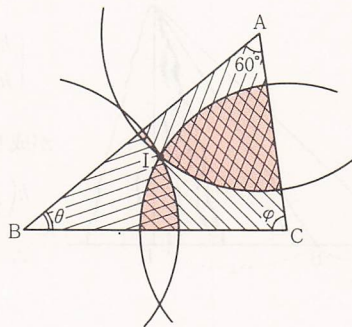
$$S_1=\pi R^2\times\frac{180}{360}=\frac{\pi}{2}R^2=\frac{7}{6}\pi$$

求める面積$S$は，$S_1$から△ABCの面積

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

を引いたものを2倍したものであるので，

$$S=2(S_1-S)$$
$$=\mathbf{\frac{7}{3}\pi-3\sqrt{3}}$$

となる．

◀
$$S_A=\pi R^2\times\frac{65^\circ}{360^\circ}$$
$$S_B=\pi R^2\times\frac{\theta}{360^\circ}$$
$$+)\ S_C=\pi R^2\times\frac{\varphi}{360^\circ}$$
$$S_1=\pi R^2\times\frac{180^\circ}{360^\circ}$$

◀ $S_1-S$ は，上図で斜線が2重になっている部分の面積．

## B. 219

(1)　山の高さを求めるために，平地上の地点Aで仰角を測ったら $\alpha$ であった．ついで平地上を山へ向いてまっすぐ $a$ だけ進んだ地点Bで再び仰角を測ったら $\beta$ であった．山の高さ $h$ を求めよ．

(2)　山の高さを求めるために，山のふもとの地点Aで仰角を測ったら $\alpha$ であった．その後，山頂に向って傾斜度 $\beta$ の坂道をまっすぐに $a$ だけ登りB地点に達し，そこで再び仰角を測ったら $\gamma$ であった．山の高さを求めよ．

**アプローチ**　山頂から平地に垂線を下ろし，そこにできる三角形を考えます．

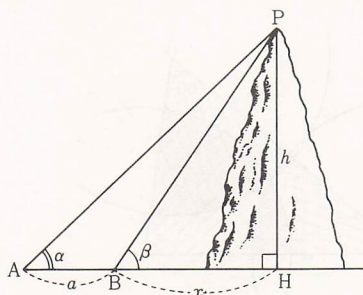
**解答**　山頂Pから平地に下ろした垂線の足をHとおく．

**(1)**　BH$=x$ とおくと

$$\begin{cases} h=(a+x)\tan\alpha \\ h=x\tan\beta \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{h}{\tan\alpha}=a+x & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{h}{\tan\beta}=x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．よって，①−②より $x$ を消去すると

$$h\left(\frac{1}{\tan\alpha}-\frac{1}{\tan\beta}\right)=a$$

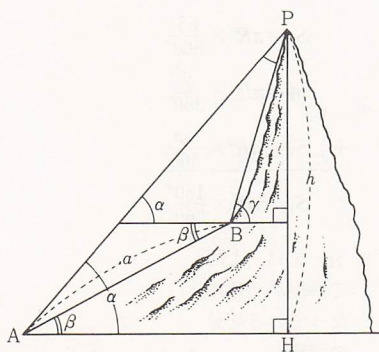
$$\therefore \quad h=\boldsymbol{\frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}}.$$

**(2)**
$$\begin{cases} \angle\mathrm{APB}=\gamma-\alpha \\ \angle\mathrm{ABP}=(180°-\gamma)+\beta=180°-(\gamma-\beta) \end{cases}$$

であるので，△PAB に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\sin\{180°-(\gamma-\beta)\}}=\frac{a}{\sin(\gamma-\alpha)}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AP}=\frac{a\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}.$$

したがって，

$$h=\mathrm{AP}\sin\alpha$$
$$=\boldsymbol{\frac{a\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}}.$$

## B.220

(1)　山の高さを知るために，同じ水平面上に2地点A，Bをとり，山の頂点Cからこの水平面上に引いた垂線の足をDとして

$AB=a$，$\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，$\angle CAD=\gamma$

を測った．山の高さCDを求めよ．

(2)　海面からの高さが$h$の山の頂点Cから，海に浮ぶ2つの船A，B間の距離を知るために，Cから水平面に下ろした垂線の足をDとして，

$\angle CAD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，$\angle ADB=\gamma$

を測った．2船間の距離ABを求めよ．

ただし，$0°<\alpha$，$\beta<90°$，$0°<\gamma<180°$ とする．

**アプローチ**　(1)では，△ABCの1辺と両端の角，(2)では△ABDの2辺とそのはさむ角がわかるので，残りの辺の長さも確定します．

**解答**　**(1)**　△ACDに注目すれば，

$CD=AC\sin\gamma$ …… ①　であるから，ACの長さがわかればよい．ところで，△ABCにおいて，正弦定理を用いると，$\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$ となるが

$\sin\angle ACB=\sin\{180°-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)$

であるので，

$AC=a\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ………　②　となる．

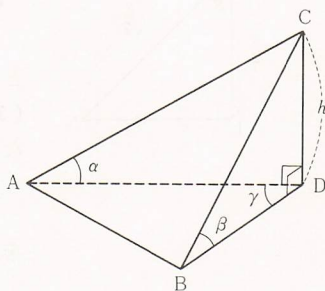
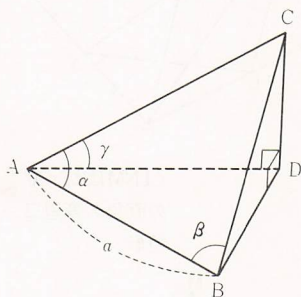
②を①に代入して　$\boldsymbol{CD=a\cdot\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}}$．

**(2)**　△ABDで

$AD=\dfrac{h}{\tan\alpha}$，$BD=\dfrac{h}{\tan\beta}$，$\angle ADB=\gamma$

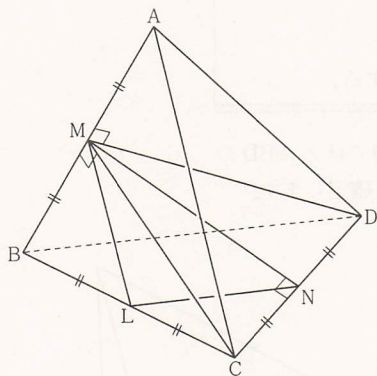
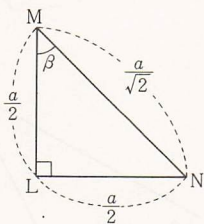
なので，余弦定理を用いると，

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\gamma$$
$$=\frac{h^2}{\tan^2\alpha}+\frac{h^2}{\tan^2\beta}-2\frac{h^2\cos\gamma}{\tan\alpha\tan\beta}．$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{AB=\frac{h}{\tan\alpha\tan\beta}\sqrt{\tan^2\alpha+\tan^2\beta-2\tan\alpha\tan\beta\cos\gamma}}．$$

## B.221

1辺の長さが $a$ の正四面体 ABCD の2辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．2直線 AB，CD のなす角を $\alpha$，2直線 MN，AC のなす角を $\beta$，2面 ABC と ABD のなす角を $\gamma$ とするとき，次のものを求めよ．

(1)　$\alpha$　　　(2)　$\beta$　　　(3)　$\cos\gamma$

**アプローチ** (3)　2面 ABC と ABD のなす角とは，各面に含まれる交線 AB に対する垂線のなす角のことです．

**解答** (1)　CA=CB，DA=DB より，

$$\begin{cases} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{cases} \quad \cdots\cdots(*) \text{であるので，} AB \perp \text{平面CMD.}$$

よって，AB は平面 CMD 上の CD とも垂直．

$\therefore\quad \alpha=\mathbf{90^\circ}$．

(2)　BC の中点を L とすると，AC∥ML より，MN と AC のなす角 $\beta$ は ∠LMN である．

∠CNM=90° より，

$$MN=\sqrt{CM^2-CN^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

△LNM は∠L=90° の直角2等辺三角形

一方，$ML=LN=\dfrac{a}{2}$ であるので，△LNM に余弦定理を用いれば，

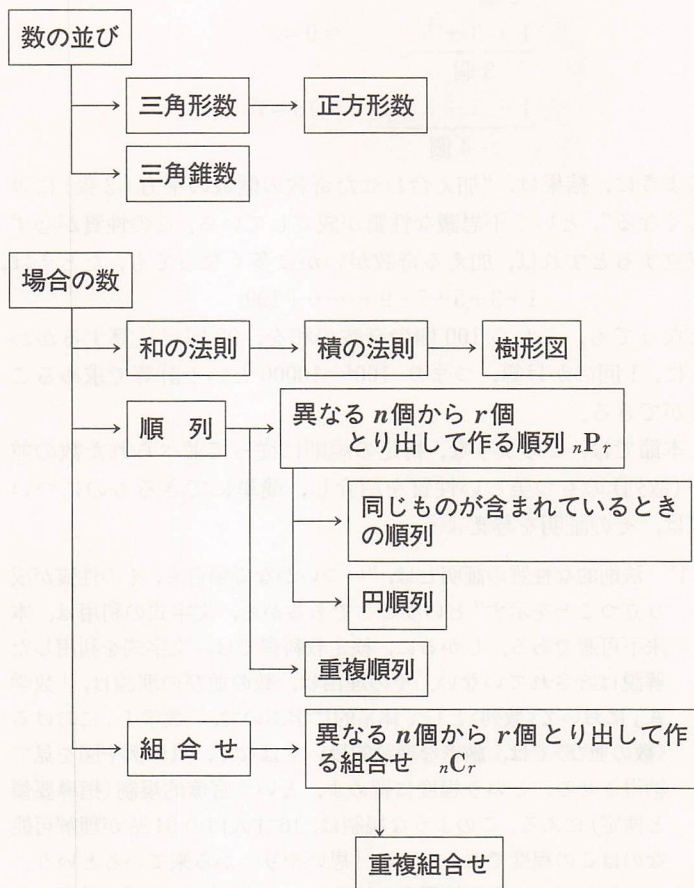
$$\cos\beta=\frac{ML^2+MN^2-LN^2}{2ML\cdot MN}=\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，$\beta=\mathbf{45^\circ}$ である．

(3)　(*)により，∠CMD が2面 ABC，ABD のなす角 $\gamma$ である．

$$CM=DM=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

を用いて，△CMD に余弦定理を適用すると

$$\cos\gamma=\frac{CM^2+DM^2-CD^2}{2CM\cdot DM}=\frac{2\left(\frac{3}{4}a^2\right)-a^2}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\mathbf{\frac{1}{3}}.$$

## A3.1 数の並び

1から始まる奇数の列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots\cdots$$

を初めから順に加えていくと，

$$\underbrace{1+3}_{2\text{個}} = 4 = 2^2$$

$$\underbrace{1+3+5}_{3\text{個}} = 9 = 3^2$$

$$\underbrace{1+3+5+7}_{4\text{個}} = 16 = 4^2$$

のように，結果は，“加え合わせた奇数の個数の平方（2乗）に等しくなる”，という不思議な性質が成立している．この性質が必ず成立するとすれば，加える奇数がいかに多くなっても，たとえば，

$$1+3+5+7+9+\cdots\cdots+199$$

となっても，これら100個の奇数の和を，99回足し算するかわりに，1回のかけ算，つまり $100^2=10000$ という計算で求めることができる．

本節では，このような，特定の規則に従って並べられた数の並び（数列）のもつ美しい性質を紹介し，簡単にできるものについては，その証明を与えよう．

1°　法則的な性質の証明とは，“いついかなる場合も，その性質が成り立つことを示す”ということであるから，文字式の利用は，本来不可避である．しかるに，検定教科書では，文字式を利用した解説は許されていない．その理由は，数の並びの理論は，「数学A」において〈数列〉として体系的に学ぶので，「数学Ⅰ」における〈数の並び〉では，厳密な理論的扱いではなく，具体例や図を見て納得させる，という程度に留めよ，という官僚的規制（指導要領と検定）にある．このような規制は，16才人口の94％が理解可能なのはこの程度である，との「思いやり」から来ているという．しかしながら，文字使用を一切許さない（たとえば，「$n$番目の奇数は $2n-1$」というような初等的表現すら！）というかたくなな規制は，数列の学び甲斐を無にし，かえって，わかりにくさを増幅するものである．無論，大学に進学しようとする読者諸君に適合することではない．本書では遠慮せず文字を用いる．

## A3.2 図形数

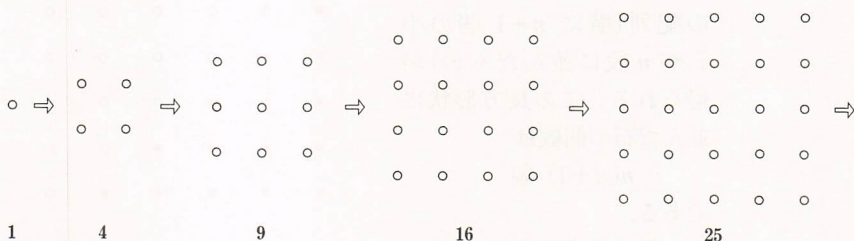
### Ⅰ．正方形数

小石を右図のように，縦・横，各一列に同個数ずつ並べるのに要する石の個数を正方形数という．

正方形数は，小さい順に

1，4，9，16，25，……

となっている．

1　4　9　16　25

［正方形数の一般形］

正方形数は，一般に，$n^2$ (ただし，$n$ は正の整数) と表される．

### Ⅱ．三角形数

小石を右のように正三角形状に並べるのに要する石の個数は，

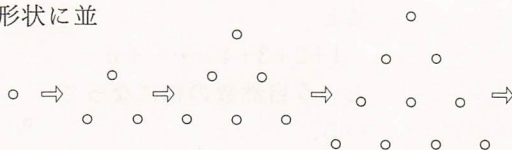
1，3，6，10，15，……

となっている．

これらは，連続する2整数の積の半分

$1\times2\times\frac{1}{2}$，$2\times3\times\frac{1}{2}$，$3\times4\times\frac{1}{2}$，$4\times5\times\frac{1}{2}$，$5\times6\times\frac{1}{2}$，……

となっている．このように三角形数は，一般に $n(n+1)\times\frac{1}{2}$

と表せる．このことを以下に証明しよう．

［証明］　1辺に$n$個が並んだ場合の三角形数を，もう一対考え，それを上下を逆にして並べ，下の図のように合わせる．

さらに縦の列を整頓すると，右図のように，長方形状の配列（横に $n+1$ 個の小石が$n$段に並んだもの）が得られる．この長方形状に並んだ石の個数は

$n(n+1)$ 個

である．

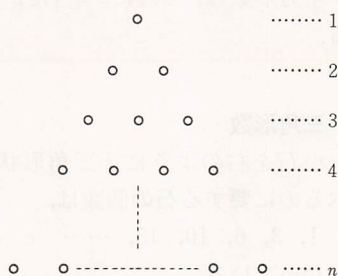
$n$段の三角形数の2つ分で，この個数になるのであるから，三角形数1つは

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

である．■

三角形数は，横一列ごとに個数を加え合わせて数えると

$1+2+3+4+\cdots\cdots+n$

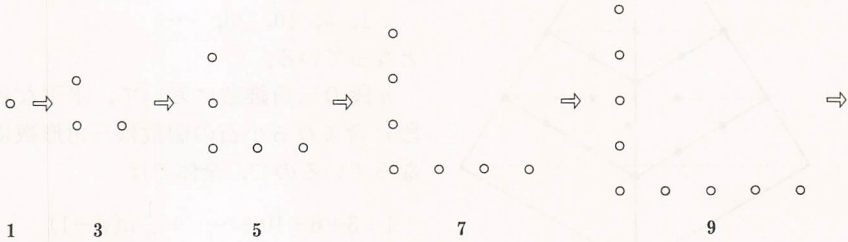
という自然数の和になっている．

したがって，三角形数を一般に表す公式は，次のように表現することもある．

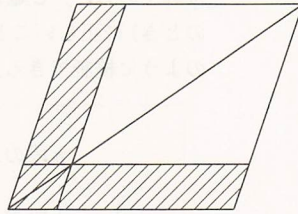
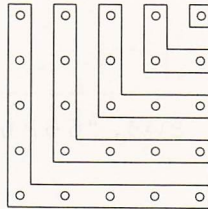
$$1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

## Ⅲ. グノーモン

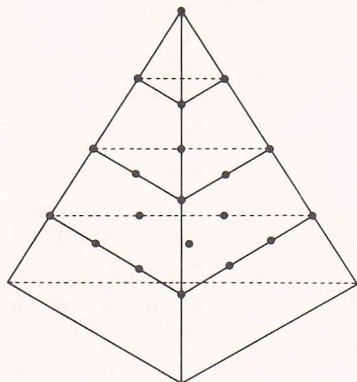
1つの小石を角におき，縦横に同数個の小石をカギ状に配置するのに要する総数は，

1，3，5，7，9，……

となる．

結局，これは1から始まる奇数を小さい順に並べたものであり，$n$ 番目は，$2n-1$ と表せる．

1°　右図のように，平行四辺形から平行四辺形をとり除いてできる図形を，古代ギリシア数学では，グノーモンと呼んだ．この呼称は，現代では，ほとんど使われていない．

2°　グノーモン数を小さい順に加えていくと，正方形ができることは，右図から直観的に納得できる．

一般に，小さい順に $n$ 個のグノーモン数(すなわち正の奇数)を加えたものは，1辺が $n$ 個の正方形数になる．すなわち，

$$1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

## IV．三角錐数

小石を左図のように，三角錐状に配置するのに要する総数を，三角錐数と呼ぶ．

三角錐数は，小さい順に

1，4，10，20，……

となっている．

$n$ 段の三角錐数において，水平な各段に含まれる小石の個数は三角形数になっているので，全体では

$$1+3+6+10+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)$$

となる．

1°　この和を $n$ の式で表すと，$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ となる．これを直接導くのは，少し難しいが，$n$ の値が小さい場合(たとえば $n=1$ のとき)に正しいことは，明らかであるし，一般的な正しさは次のように検証できる．

$$
\begin{array}{rl}
n\text{ 段の三角錐数} & =\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\
-)\ n-1\text{ 段の三角錐数} & =\frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \\
\hline
\text{底面の三角形数} & =\frac{1}{6}n(n+1)\{(n+2)-(n-1)\} \\
 & =\frac{1}{2}n(n+1)
\end{array}
$$

という，“もっともな関係”が導かれる．

# A3.3 さまざまな数と列

## I. $n$ 角形の辺数，対角線数

3 角形，4 角形，5 角形，6 角形，……のそれぞれの対角線と辺をあわせた総数は，

3，6，10，15，……

となっている．これは，三角形数の列を途中から (2 番目から) 始めたものと一致しているように見える．これが正しいことは，次のように示すことができる．

$n$ 角形の対角線と辺の総数を $D(n)$ と表すことにする．たとえば，

$$D(3)=3,\ D(4)=6,\ D(5)=10,\ D(6)=15,\ \cdots\cdots$$

$k$ 角形 $P_1P_2\cdots\cdots P_k$ において，$k+1$ 個目の頂点 $P_{k+1}$ を増やして $(k+1)$ 角形を作ると，

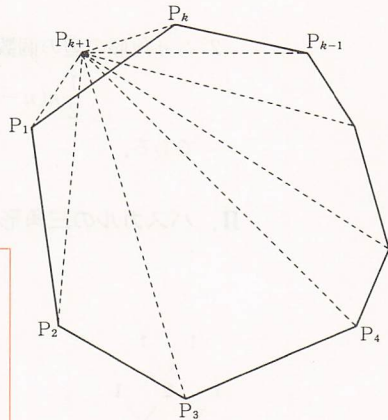
$P_{k+1}$ と，$P_1$，$P_2$，……$P_k$

を結ぶ $k$ 本の線分が新たな対角線や辺として増える．

つまり

$$D(k+1)=D(k)+k$$

という関数が一般に成り立つ．

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{D(3)+3}_{D(4)}+4}_{D(5)}+5}_{D(6)}+\cdots\cdots+(n-1)}_{D(n)}$$

よって，

$$\begin{aligned} D(n) &= D(3)+3+4+5+\cdots\cdots+(n-1) \\ &= \ 3 \ +3+4+5+\cdots\cdots+(n-1) \\ &= 1+2+3+4+5+\cdots\cdots+(n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

これで次のことが証明できた．

> $n$ 角形の辺および対角線の本数の合計は，
>
> $$\frac{1}{2}n(n-1)$$
>
> である．

1°　直接，$n$ 角形を考察して上の結果を導くこともできる．

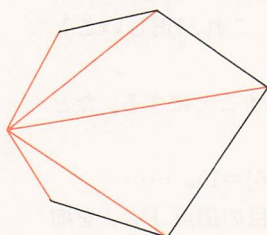
$n$ 角形の任意の1頂点から出る辺および対角線を合わせた個数は $n-1$ である．

$n$ 個の頂点についてこの総和を取れば

$$n(n-1).$$

しかし，それでは各辺，各対角線は2重に数えられているから，求める本数は

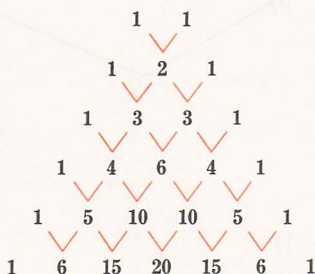
$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

である．

2°　$n$ 角形の辺の個数は $n$ であるから，対角線だけなら

$$\frac{1}{2}n(n-1)-n=\frac{1}{2}n(n-3)$$

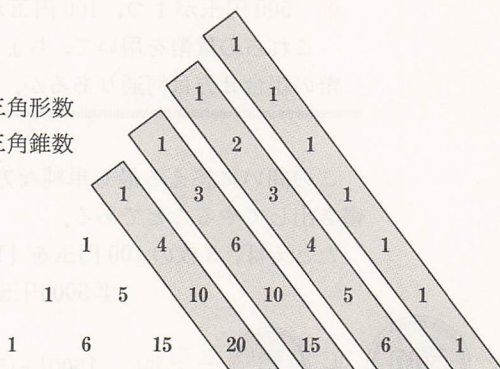
である．

## II．パスカルの三角形

整数を次の規則に従って三角形状に並べていく，

> **[規則1]**　初めに1を2つ横に並べて書く．
>
> **[規則2]**　左図のように隣りあった2数の和を2数の中央の下の段に書く．
>
> **[規則3]**　各段の両端には1を書く．

すると上図のような数の配置が，いくらでも先へのばしていくことができる．このようにして得られる数の三角形を，パスカルの三角形と呼ぶ．

1°　パスカルの三角形には，三角形数や三角錐数が現れる．たとえば，左上から右下に向かって数を順に読むと

1，1，1，1，1，1，…
1，2，3，4，5，6，…
1，3，6，10，15，　…　三角形数
1，4，10，20，　　…　三角錐数

2°　パスカルの三角形に並んだ数を横に読むと，2次式 $(a+b)^n$ の展開の係数が並んでいる．これについては，組合せを学んでから，もう少し，詳しく説明する．

$(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b$ …… 1　1
$(a+b)^2=1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$ …… 1　2　1
$(a+b)^3=1\cdot a^3+3\cdot a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$ …… 1　3　3　1
$(a+b)^4=1\cdot a^4+4\cdot a^3b+6\cdot a^2b^2+4\cdot ab^3+1\cdot b^4$ …… 1　4　6　4　1

## A 3.4　場合の数の基本法則

問　500円玉が1つ，100円玉が4つ，50円玉が6つある．

これらの貨幣を用いて，ちょうど550円を支払いたい．貨幣の組合せ方は何通りあるか．

この問いに答える最も単純な方法は，可能な組合せをすべて書き出してやることである．

たとえば，3枚の100円玉を [100]×3 で表すことにする．まず500円玉を使う組合せは1つで

[500]+[50]　　………①

だけである．

500円玉を使わない組合せでは，100円玉を4つ，あるいは，3つ使わねばならない．したがって

[100]×4+[50]×3　　………②

[100]×3+[50]×5　　………③

だけである．結局①〜③の3通りだけが可能な組合せである．

一般に，あることがらの起こり得るすべての場合を，

「数え落とすことなく」

また，

「重複することなく」

数えるためには，必要に応じていくつかの場合に分類し，順序正しく考えていくことが大切である．

このような“場合の数”を求める作業の基本となるのは，次の2つの法則である．

**［和の法則］**　2つのことがら $A$，$B$ があって，これらは同時には起こり得ないものとする．そして，

$A$ の起こり方が $m$ 通り，$B$ の起こり方が $n$ 通り

あるとすれば，

$A$ または $B$ の起こる場合の数は $m+n$（通り）である．

**[積の法則]**　2つのことがら $A$, $B$ があって，これらの起こり方はたがいに無関係であるとする．そして，

$A$ の起こり方が $m$ 通り，$B$ の起こり方が $n$ 通り

あるとすれば，

$A$, $B$ の双方が同時に起こる場合の数は $m \times n$ (通り)

である．

1°　例　1から20までの自然数の集合を $M$ とする．$M$ の数のうち，3で割ったとき1余る数は1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, の7個である．また，3で割ったとき2余る数も，2, 5, 8, 11, 14, 17, 20の7個である．したがって，和の法則により，$M$ の数のうち，3で割りきれない数(つまり，1または2余る数)は $7+7=14$ (個)である．

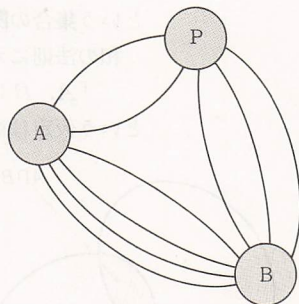
2°　例　右図でA市からB市へ行くコースは何通りあるかを考える．

直接AからBへ向かうコースは4(通り)あり，

Pを経由して向かうコースは，積の法則により，

$2\times3=6$ (通り)

ある．したがって，和の法則により，コースは全部で，

$4+6=10$ (通り) である

3°　積の法則において，$A$, $B$ の起こり方が“たがいに無関係である”というのは，$A$ の起こり方 $m$ 通りのうちどれが起こったかに関係なく，$B$ の起こり方はいつでも $n$ 通りあるということである．このとき，$B$ を先に考えれば，$B$ の起こり方 $n$ 通りのうちのどれが起こったかに関係なく，$A$ の起こり方は $m$ 通りずつあることになる．

4°　3つ以上のことがらについても，同様のことが成り立つ．

### 5°　和の法則と集合の要素の数との関係[#]

集合の考え方(詳しくは「数学A」で学ぶ)を使えば，和の法則は，次のように表現できる．

$A$，$B$ の起こる場合全体が，それぞれ集合

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_m\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$$

で表されているとする．このとき，

$A$ または $B$ が起こる場合全体は集合 $A\cup B$ で表される．

$A$，$B$ が同時に起こる場合全体は集合 $A\cap B$ で表される．したがって，「$A$，$B$ が同時には起こり得ない」ことは，$A\cap B=\phi$ (空集合) であることに対応する．

そこで，集合 $A$ の要素の個数を $n(A)$ で表すと，和の法則は

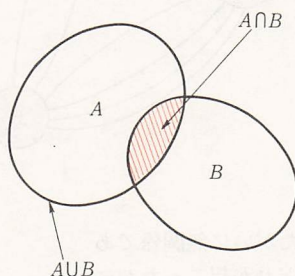
$$A\cap B=\phi \text{ のとき，} n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

**和の法則と集合の要素の個数**

という集合の関係と対応することになる．

和の法則において，

「$A$，$B$ は同時には起こらない」，すなわち，「$A\cap B=\phi$」

という仮定は重要である．

もし，$A\cap B\neq\phi$ であるときには，$n(A)+n(B)$ の計算で $A\cap B$ の要素が 2 重に数えられるから，それを引けば，$n(A\cup B)$ が求められる．

すなわち，一般に，次の関係が成り立つ．

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

### 6°　積の法則と集合の要素の数との関係[#]

集合の考え方を用いれば，積の法則は，次のように表現できる．

$A$，$B$ の起こる場合全体がそれぞれ集合

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_m\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$$

で表されているとする．このとき，$A$，$B$ の起こり方がたがいに無関係であるなら，$A$，$B$ の両方が起こる場合全体は

$(a_1,\ b_1),\ (a_1,\ b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_1,\ b_n)$
$(a_2,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_2,\ b_n)$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$(a_m,\ b_1),\ (a_m,\ b_2),\ \cdots\cdots,\ (a_m,\ b_n)$

を要素とする集合である．これを，$A$ と $B$ との直積集合と呼び，記号 $A\times B$ で表す．

積の法則は，直積集合の要素の個数に関する関係式

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$$

**積の法則と集合の要素の個数**

にほかならない．

7°　場合の数を求める複雑な問題も，和の法則，積の法則をあてはめて，一歩一歩順序よく考えていけば必ず解決する．

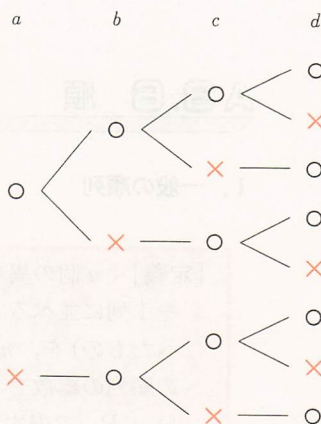
この際，以下で学ぶ順列や組合せの公式を上手に利用したり，状況によっては

「条件に適さぬものを数えて，全体から引く」

などの工夫をすることにより，時間と労力が節約できることがある．

また，手堅く調べるには，**樹形図** を利用すると便利であることは，中学でも学んでいるはずである．

例　「1列に並んだ4枚の板 $a$，$b$，$c$，$d$ を白か赤にぬるとき，白は連続してもよいが，赤は連続してはいけないとすれば，ぬり方は何通りあるか．」

白を○，赤を×として，×が連続しないことを考えると右の樹形図を得るので，ぬり方は全部で 8通りある．

## A3.5 階　乗

［定義］ $n$を正の整数とするとき，1から$n$までのすべての整数を掛け合わせたものを**$n$の階乗**といい，記号 $n!$ で表す．すなわち，

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(n-1)\cdot n$$

**$n$の階乗 $n!$**

1°　$n!$ は$n$の階乗（かいじょう），あるいは，$n$ factorial［エヌ・ファクトリアル］と読む．

2°　$n!=(n-1)!\times n$ である．

3°　$n!$ は上のように正の整数$n$について定義したものであるから，0! は本来意味がないが，便宜上 $0!=1$ と約束する習慣である．

4°　$n!$ は$n$が増すとともに急激に増大していく数で，わずか $n=20$ としても，

$$20!=2432902008176640000$$

のような極めて大きな数になる．

　また，$a$をどんな大きな正の定数としても

　　$n$さえ十分大きければ，$n!$ は $a^n$ より大きくなる．

## A3.6 順　列

### I．一般の順列

［定義］ $n$個の異なるものから$r$個をとり出して，それを1列に並べるとき，その1つ1つの並べ方（または並べたもの）を，$n$個のものから$r$個とる順列という．この順列の総数を**$n$個のものから$r$個とる順列の数**といい，${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．

**$n$個のものから$r$個とる順列**

1°　記号 ${}_nP_r$ のPは順列 (permutation) の頭文字をとったものである．${}_nP_r$ は[ピーのエヌ・アール]または[エヌ・ピー・アール]と読む．

[公式]　$n$ 個のものから $r$ 個をとる順列の数 ${}_nP_r$ は

$r$ 個の連続する整数の積

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \quad \cdots\cdots \text{Ⓐ}$$

とくに，$n$ 個のもの全部を1列に並べる順列の数 ${}_nP_n$ は

$${}_nP_n=n!$$

${}_nP_r$ の公式

2°　証明は教科書にゆずる．

3°　Ⓐを

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots\cdots \text{Ⓑ}$$

の形に表すこともある．

例　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$,　${}_4P_4=4!=24$

4°　理論的な取り扱いには，Ⓑの形もよく用いられる．

5°　${}_nP_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ において，$r=n$ とすると ${}_nP_n=\dfrac{n!}{0!}$ となるが，$0!=1$ と約束してあるから (☞A 3.5の3°)，
${}_nP_n=n!$ となり，Ⓑは $r=n$ でも成り立つ．

注意　この公式を使うことができるのは，「$n$ 個のもの」がすべて互いに区別できる場合である．そうでない場合の順列については，次節IIで述べる．

## II．同じものが含まれるときの順列

[公式]　$n$ 個のもののうちで，
「$p$ 個は同じもの，$q$ 個は他の同じもの，$r$ 個はまた他の同じもの，……，$s$ 個がまた他の同じもの」であるとする．
　これら $n$ 個のもの全部を1列に並べる順列の数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots s!} \quad (\text{ただし } p+q+r+\cdots\cdots+s=n)$$

同じものが含まれるときの順列の公式

1°　証明は教科書にゆずる．

2°　例1　$a$，$a$，$a$，$b$，$c$，$c$ の6個の文字を全部用いてできる順列の数は

$$\frac{6!}{3!1!2!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{2}=60$$

である．

例2　$(a+b+c)^6$ を展開したときの $a^3bc^2$ の係数を考える．
これは

$(a+b+c)^6=(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\cdots\cdots(a+b+c)$

として，右辺の6つの(　)内から1つずつ文字をとって，その順に掛け合わせて作った項のうち，$aaabcc$，$aabcac$ のように3個の $a$ と1個の $b$ と2個の $c$ とからなる項の個数に等しい．
したがって，求める $a^3bc^2$ の係数は

「$a$，$a$，$a$，$b$，$c$，$c$ の6個の文字を全部用いてできる順列の数」

と同じである．これは 例1 で求めてあるので，$a^3bc^2$ の係数 $=60$ である．

## III.　円順列

$n$ 個の異なるものを円形に並べて相互の順序だけを問題にするとき，その1つ1つの並び方（または並べたもの）を $n$ 個のものの **円順列** という．

［公式］　$n$ 個のものの円順列の数は

$(n-1)!$

**円順列の公式**

1°　**証明**：$n$ 個のものの円順列は，そのうちある特定の1個の位置を固定し，他の $n-1$ 個を1列に並べたものを，最初に固定した1個につながるように置けば，すべての場合がつくされるから，$n-1$ 個のものを全部1列に並べる順列の数に等しい．よって

$${}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}=(n-1)!$$

である．■

**IV. 重複順列**

1, 2, 3, 4 の 4 個の数字を用いてできる 3 桁の自然数はいくつあるかを考える. この場合, たとえば 334 のように同じ数字が重複して用いられてもよいから, 百位の数字のえらび方, 十位の数字のえらび方, 一位の数字のえらび方は互いに無関係(独立) であり, それぞれ 4 通りずつある. したがって, 積の法則により, 求める 3 桁の自然数の個数は, $4^3=64$ である.

一般に, 異なった $n$ 個のもののなかから, 同じものを何回えらんでもよいとして並べるとき, その 1 つ 1 つの並べ方(並んだもの)を, **$n$ 個のものから $r$ 個取る重複順列** という.

[公式] 異なる $n$ 個のものから $r$ 個取る重複順列の総数は

$$n^r$$

である.

**重複順列の総数**

1° 例 1, 2, 3, 4 の 4 数字からつくられる 3 桁の自然数の個数は $4^3=64$ である.

また, 1, 2, 3, の 3 数字からつくられる 4 桁の自然数の個数は $3^4=81$ である.

## A3.7 組合せ

[定義] $n$ 個の異なるものから $r$ 個とり出して組を作るとき, その 1 つ 1 つの組を, $n$ 個のものから $r$ 個とる **組合せ** という. この組合せの総数を **$n$ 個のものから $r$ 個とる組合せの数** といい, ${}_nC_r$ で表す.

**$n$ 個のものから $r$ 個とる組合せ**

1°　記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ の C は組合せ (combination) の頭文字をとったものである．なお，${}_n\mathrm{C}_r$ のことを $\dbinom{n}{r}$ と書くこともある．

2°　上の定義を守れば，${}_n\mathrm{C}_0$ に元来意味がないが，

$${}_n\mathrm{C}_0=1$$

と約束するのが習慣である．

［公式］　$n$ 個のものから $r$ 個とる組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ は，

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r\,!}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個の連続整数の積}}}{r\,!}\quad\cdots\cdots\ Ⓐ$$

すなわち，$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\quad\cdots\cdots\ Ⓑ$$

${}_n\mathrm{C}_r$ の公式

3°　証明は教科書にゆずる．

なお，次のように考えて，同じものが含まれるときの順列の公式（☞ A 3.6 Ⅱ）から導くこともできる．

$r$ 個の白玉と $n-r$ 個の黒玉を１列に並べるときの順列の数は

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

である．これは，$n$ 個の場所のうち，白玉を置く $r$ 個の場所を選び出すしかたの数，つまり $n$ 個のものから $r$ 個取る組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ にほかならない．よって，Ⓑが得られる．

4°　例　${}_5\mathrm{C}_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$，　${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2!}=\dfrac{1}{2}n(n-1)$

5°　$n$ 個の要素からなる集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ の部分集合のうち，$r$ 個の要素からなるものの個数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である．

［公式］　(1)　${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

(2)　${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

${}_n\mathrm{C}_r$ の基本性質

6°　この公式は，${}_n\mathrm{C}_r$ の公式から計算によっても証明できるが，次のように，組合せの意味を考えて導くことができる．

(1)　$n$ 個のものからどの $r$ 個をとり出すかということは，$n$ 個のうちどの $n-r$ 個を残すかというのと同じである．

$\therefore \quad {}_nC_r={}_nC_{n-r}$

ガイド　(2)について上のような証明に関しては，☞B.322

7°　上の公式(1)において，$r=n$ とおくと ${}_nC_n={}_nC_0$ となるが，前に述べたように ${}_nC_0=1$ と約束してあるので，(1)は $r=0$，$r=n$ のときも成り立つことになる．

8°　${}_nC_r$ において，$r$ が $n$ に近い場合には，(1)を用いて次のように計算するのが便利である．

例　${}_{15}C_{13}={}_{15}C_2=\dfrac{15\cdot 14}{2\cdot 1}=105$，${}_nC_{n-2}={}_nC_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

## A 3.8　重複組合せ ♯

りんごとみかんを合計5個えらんで袋に入れたい(「果物セット」を作る)．入れ方(つまり「果物セット」の種類)はいく通りあるか．もし袋に入れる果物が1種類だけになっても差支えないとすれば，りんごとみかんの組合せ方は，りんごの個数0，1，2，3，4，5できまり，その組合せ方は6通りである．

さらに，りんご，みかん，なしの3種類の果物から合計5個をえらんで袋に入れるときはいく通りあるか．いま，りんご，みかん，なしをそれぞれ $R$，$M$，$N$ で表すことにすれば，たとえば，りんご2つ，みかん2つ，なし1つの組合せは $\{R, R, M, M, N\}$ で表される．すなわち果物の袋への入れ方の総数は，3個のもの $(R, M, N)$ から重複を許して5個をえらぶ組合せの総数である．

一般に，**$n$ 個の異なる** ものから，**同じものをくり返し使うこと** (重複) **を許して $r$ 個を取る組合せ**を，$n$ 個のものから $r$ 個を取る **重複組合せ** といい，そのような組合せの総数を記号 ${}_nH_r$ で表す．

［公式］ $n$ 個の異なるものから $r$ 個取る重複組合せの総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ は，

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であたえられる．

**重複組合せの公式**

1° 重複組合せの公式は，高校の正規のカリキュラムには入っていない．しかし重複組合せに関連した問題を解決する能力は，上の公式を覚えること以上に，場合の数の数え方のやや高級な処理能力の証しとして重要である．

2° ガイド 公式の証明については ☞ B.321

## A3.9 2 項定理#

式の理論が「数学A」に移されたため，組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ の最も重要な応用であるこの定理は，「数学Ｉ」の教科書では扱われないが，本書では，組合せの自然な発展としてここで述べておこう．

たとえば，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

のように，$n$ を自然数とするとき $(a+b)^n$ は $a^n$，$a^{n-1}b$，………，$a^{n-k}b^k$，……，$ab^{n-1}$，$b^n$ のそれぞれに適当な係数を掛けて加え合わせたものになることは明らかであるが，その係数は次の2項定理によりあたえられる．

［定理］ $(a+b)^n = a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots$
$+ {}_nC_k a^{n-k}b^k + \cdots\cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + b^n$

**2項定理**

1°　$(a+b)^n$ の展開において $a^{n-k}b^k$ という項は，$n$ 個の因数

$$a+b,\ a+b,\ a+b,\ \cdots\cdots,\ a+b$$

の中から，$a$ という項を選ぶ $n-k$ 個を取り出す組合せ(すなわち，$b$ という項を選ぶ $k$ 個を取り出す組合せ)の数 ${}_nC_{n-k} = {}_nC_k$ 通りだけ出てくる，という展開の基本的事実を思い起こせば，証明は終わりである．

——A3　おわり——

## B.301

リンゴ4個，カキ2個，ミカン4個がある．この中から5個取り出す方法は何通りあるか．

**アプローチ** リンゴどうし，カキどうし，ミカンどうしは区別がつかないので，それぞれの個数しか問題にならない，というのが本問のポイントです．ある特定の果物に注目して，その果物を取り出す個数で場合分けをします．どの果物に注目するのがよいでしょうか？

**解答** カキの個数で分類する．

i）カキ0個の場合：

リンゴは0，1，2，3，4個のいずれかであるが，残りをミカンで取り，合計5個とすることのできるのはリンゴが1個以上の場合だから，4通りである．

ii）カキ1個の場合：

リンゴは0，1，2，3，4個のいずれかで，それぞれの場合において残りをミカンで取り合計5個とすることができるので，5通りである．

iii）カキ2個の場合：

リンゴは0，1，2，3個のいずれかで，それぞれの場合で残りをミカンで取ることができるので，4通りである．

i）ii）iii）をまとめて

$4+5+4=\mathbf{13}$（**通り**）．

**注意** カキに注目したので，分類が3つで済んだ．リンゴに注目して分類したら，どうなるであろうか？

**研究** リンゴの個数，カキの個数，ミカンの個数をそれぞれ，$x$，$y$，$z$とおくと，$x$，$y$，$z$は，

$$x+y+z=5 \quad ただし \begin{cases} 0 \leqq x \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \\ 0 \leqq z \leqq 4 \end{cases}$$

を満たす整数である．本問は，この「整数解の個数を求めよ」という問題である，ということができる．

リンゴ，カキ，ミカンが十分に用意されているとすると，後に学ぶ重複組合せの考え方を利用して ${}_3H_5={}_7C_5=21$（通り）と出すことができる．

## B. 302

$$(2n)^2-(2n-1)^2+(2n-2)^2-\cdots\cdots+2^2-1^2$$

の値を次の2通りの方法で求めよ．ただし，$n$ は自然数．

(1) $T_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ （$n$ 番目の三角形数）とおくと

$n^2=T_n+T_{n-1}$ （$n\geqq 2$ のとき）

と表せることを示し，これを利用する．

(2) $n^2-(n-1)^2$ が $n$ 番目のグノーモン数であることを示し，これを利用する．

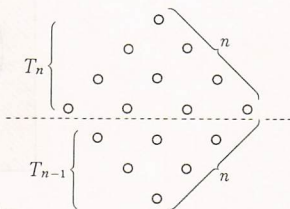
**アプローチ** 三角形数，正方形数，グノーモン数の間の関係の一例です．図を描いてみましょう．

**解答** （1） 右図のように1辺 $n$ の三角形と1辺 $n-1$ の三角形を並べると，$n^2=T_n+T_{n-1}$ がわかる．

これを用いると

$$(2n)^2-(2n-1)^2+(2n-2)^2-\cdots\cdots+2^2-1^2$$

$$=(T_{2n}+T_{2n-1})-(T_{2n-1}+T_{2n-2})+(T_{2n-2}+T_{2n-3})-\cdots\cdots+(T_2+T_1)-1$$

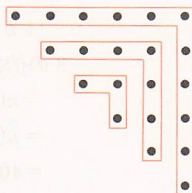
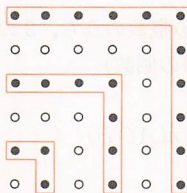
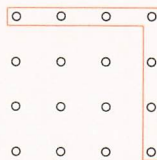
$$=T_{2n}=\frac{1}{2}2n(2n+1)=\boldsymbol{n(2n+1)}.$$

◀かっこをつけかえた．$T_1=1$

（2） $G_n$ を $n$ 番目のグノーモン数（$=2n-1$ であった（☞ $p.83$ A3.2Ⅲ））とすると，右の図から $G_n=n^2-(n-1)^2$ がわかる．

これを用いると

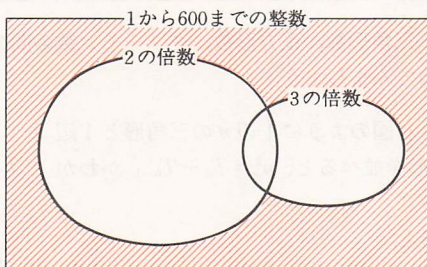
$$(2n)^2-(2n-1)^2+(2n-2)^2-(2n-3)^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots+2^2-1^2=G_{2n}+G_{2(n-1)}+\cdots\cdots+G_{2\cdot 1}\quad\cdots\cdots(\bigstar)$$

となるが，左下図の黒丸の部分を右下図のように移動すれば

この和(★)は，$T_{2n}$，すなわち $n(2n+1)$ に等しいことがわかる．

## B. 303

1から600までの整数のうち，6と互いに素であるものの個数を求めよ．

**アプローチ** 「整数 $n$ が6と互いに素」は「$n$ は2の倍数でも3の倍数でもない」と同じことです．よって，下図の斜線部に入っている整数の個数を求めることになります．

**解答** $A=\{n\,|\,n$ は1から600までの2の倍数$\}$
$B=\{n\,|\,n$ は1から600までの3の倍数$\}$
と表すことにする．

集合 $S$ の要素の個数を $n(S)$ のように表すことにすると

$n(A)=$(1から600までの2の倍数の個数)$=300$
$n(B)=$(1から600までの3の倍数の個数)$=200$
$n(A\cap B)=$(1から600までの6の倍数の個数)
$=100$

よって

(1から600までの整数のうち，2の倍数であるか，3の倍数であるものの個数)
$=n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=400$

となるので，6と互いに素であるものの個数は

$600-400=$**200 (個)**

である．

## B.304

大，小2個のサイコロを投げるとき，

(1)　出た目の和が3の倍数となる場合は何通りあるか．

(2)　出た目の積が3の倍数となる場合は何通りあるか．

**アプローチ**　和については，サイコロの目の数を3で割った余りについて分類します．積については，出た目の積が3の倍数であるとは，少なくとも片方の目が3の倍数であることと同じであることに注意しましょう．

**解答**　**(1)**　出た目の和が3の倍数となるのは，それぞれの目を3で割った余りの和が3の倍数となるときであるから，目の出方は

$$(\text{大の目の余り，小の目の余り})=\begin{cases}(0,\ 0)\\(1,\ 2)\\(2,\ 1)\end{cases}$$

に応じて3つの類に分けられる．

◀まず，粗い分類を行う．

一方，3で割った余りが0となるサイコロの目は2つある．余りが1，2のときも同様である．

よって，上の3つの類のそれぞれに，$2\times2=4$（通り）の目の出方があり，全体では

$3\times4=$**12**（通り）

◀積の法則

ある．

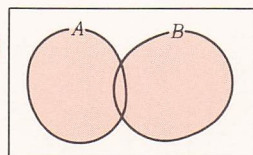
**(2)**　出た目の積が3の倍数とならないのは，大，小いずれの目も3の倍数でないとき，つまり1，2，4，5のいずれかであるとき，である．そのような目の出方は　$4\times4=16$（通り）ある．

◀

$A$：大の目が3の倍数
$B$：小の目が3の倍数

2個のサイコロの目の出方は全部で　$6\times6=36$（通り）あるから，3の倍数となるのは

$36-16=$**20**（通り）

である．

［注］(2)において，大の目が3の倍数となる場合と小の目がそうなる場合，それぞれの出方の数を数えて足してしまうとまずい．なぜなら，大小双方に3の倍数が出る出方の数を2回数えたことになるからである．（右上の図を見よ．）

## B.305

1から100までの整数の中から，積が6の倍数となる2つの相異なる数を選ぶ方法は何通りあるか．

**アプローチ** $6=2\times3$ ですから，2つの整数のそれぞれが，2で割れるか否か，3で割れるか否か，で場合分けします．積が6の倍数となるのは，そのうちのどの場合でしょうか．

**解答** $1\leqq a\leqq100$，$1\leqq b\leqq100$ を満たす相異なる2整数の積 $ab$ が6の倍数となる場合は

(1) $a$，$b$ のうち，一方が2で割り切れ、3で割り切れず、他方は2で割り切れず，3で割り切れる

(2) $a$，$b$ のうち，一方は6で割り切れる

の2つの場合に分けられる．さらに，場合(2)は

(2A) $a$，$b$ の双方が6で割り切れる

(2B) $a$，$b$ の一方は6で割り切れ，他方は6で割り切れない

の2つの場合に分類される．

1から100までの整数のうち，2の倍数の個数は $100\div2=50$ より50個，3の倍数は $100\div3=33.3\cdots$ より33個，6の倍数は $100\div6=16.6\cdots$ より，16個である．よって

2の倍数であって3で割り切れないものの個数は
$50-16=34$ (個),

3の倍数であって2で割り切れないものの個数は
$33-16=17$ (個),

6の倍数でないものの個数は
$100-16=84$ (個)

である．

場合(1)は $34\times17=578$ (通り)

場合(2A)は $\dfrac{16\times15}{2!}=120$ (通り)

場合(2B)は $16\times84=1344$ (通り)

以上を合わせると

$578+120+1344=\mathbf{2042}$ (**通り**)

となる．

(1), (2B) は共通要素のない2つの集合から1つずつ元を選ぶ方法の個数．
(2A) は1つの集合から互いに異なる2つを選ぶ方法の個数．

## B. 306

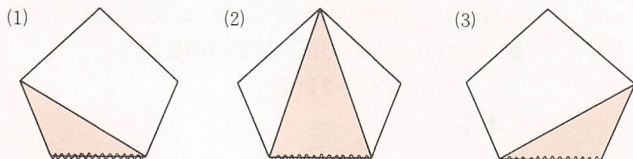
固定された$n$角形$(n \geqq 4)$がある．これを，$n$角形の内部で交わらない対角線によって三角形に分割したい．何通りの方法があるか，$n=4, 5, 6$ に対し，その分割の個数 $N(n)$ を求めよ．

**アプローチ** どのような場合分けをすればうまくいくでしょうか．

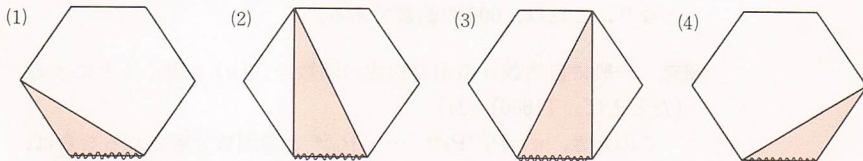
**解答**　$n$角形の1辺を固定する．問題文に述べてある方法による$n$角形の分割一通りに対し，その1辺を含む三角形はただ一通りに決まる．よって，その三角形の3頂点のうち，その1辺の両端点以外の頂点は一通りに定まる．いま，すべての分割の集まりを，その頂点の位置に応じて$(n-2)$通りに場合分けする．

ABを1辺とする三角形は $\triangle P_kAB\,(k=1, 2, \cdots, n-2)$

まず，$n=4$ のとき，分割は2つある対角線のうちの1つの選び方によって決まるので $N(4)=\mathbf{2}$ である．

次に $n=5$ のとき，頂点の位置に応じて

(1)
(2)
(3)
の3通りに分割される．(1)と(3)の場合はそれぞれ，分割されていない四角形の分割の個数分だけ分割の方法がある．よって

$$N(5)=N(4)+1+N(4)=\mathbf{5}.$$

$n=6$ のとき，頂点の位置に応じて，

(1)
(2)
(3)
(4)
の4通りに分割され，(1)と(4)の場合は，$N(5)$ 通り，(2)と(3)の場合は $N(4)$ 通りの分割がある．

よって

$$N(6)=N(5)+N(4)+N(4)+N(5)=\mathbf{14}.$$

## B. 307

600 の正の約数は全部で何個あるか．

**アプローチ** 「自然数$m$が自然数$n$の約数である．

$\Longleftrightarrow$　$m=2^a3^b5^c$ ……，$n=2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ … と素因数分解したとき

$a \leqq \alpha$，$b \leqq \beta$，$c \leqq \gamma$，…… が成り立つ．」

という事実に注目します．(たとえば，18 が 540 の約数であることは，$18=2\times3^2$　$540=2^2\times3^3\times5$　と素因数分解すれば，すぐにわかります．)

**解答** 600 を素因数分解すると

$$600=2^3\times3\times5^2$$

1 も 600 も「約数」▶ となる．よって，600 の約数は

$$2^x\times3^y\times5^z$$

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 3 \\ 0\leqq y\leqq 1 \\ 0\leqq z\leqq 2 \end{cases}$$

素因数分解の一意性 ▶ であり，異なる$(x,\ y,\ z)$に対しては異なる約数が対応している．

$x$の取り方は 4 通り，$y$の取り方は 2 通り，$z$の取り方は 3 通りあるから，$(x,\ y,\ z)$の取り方の個数，すなわち 600 の正の約数の個数は

$$4\times2\times3=\mathbf{24}\ (\textbf{個})$$

である．

**注意** 本問で，$x$，$y$，$z$は 0 であってもよいことを念押ししておく．

たとえば，$x=2$，$y=0$，$z=1$ のときは

$$\begin{aligned} 2^x\times3^y\times5^z &= 2^2\times3^0\times5^1 \\ &= 4\times1\times5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

となり，これは，600 の約数である．

**研究** 一般に自然数$n$の正の約数の個数を$\mathrm{T}(n)$と書くことにする．(たとえば，$\mathrm{T}(600)=24$)

このとき，$n=\mathrm{P}_1{}^{a_1}\mathrm{P}_2{}^{a_2}$ …… $\mathrm{P}_n{}^{a_n}$ と素因数分解されるならば，$\mathrm{T}(n)=(a_1+1)(a_2+1)$ …… $(a_n+1)$ となる．

また，2 つの自然数$m$，$n$に対し

$m$と$n$は互いに素　$\Longleftrightarrow$　$\mathrm{T}(mn)=\mathrm{T}(m)\mathrm{T}(n)$

が成り立つ．これは上で用いた考え方によって確認できる．

## B.308

右のような枠がある．小文字 $a$，$a$，$b$，$c$ を第1行の枠に入れ，大文字A，A，B，Cを第2行の枠に入れて並べる．

(1)　並べ方は何通りあるか．

(2)　同じアルファベット(例　$a$ とA)からなる列が存在しない並べ方は全部で何通りあるか．

(3)　同じアルファベットからなる列がちょうど1つある並べ方は全部で何通りあるか．

| | 第1列 | 第2列 | 第3列 | 第4列 |
|---|---|---|---|---|
| 第1行 | | | | |
| 第2行 | | | | |

**アプローチ**　(2)，(3)ではある列の上の行にある文字を入れたとき，その下にどのような文字を入れることができるかいろいろ具体的に試してみて状況を把握する必要があります．

**解答**　**(1)**　2つの行の並べ方は，$b$，$c$，B，Cの場所の指定によって決まるので，各行の並べ方は $4\cdot3=12$ (通り) ある．各行とも他方の行とは無関係に並べ方を決められるので，全体として並べ方は，$12\times12=$**144 (通り)** ある．

◀ 第1行目で

と $b$，$c$ を並べれば，残り斜線部2ケ所は自動的に $a$ が入る．

**(2)**　2つの小文字の $a$ の下にはBとCがそれぞれ来なくてはならないので，小文字の $b$ と $c$ の下にはAが来なくてはならない．したがって第1行の並べ方を決めたとき，第2行の並べ方は，左側の $a$ の下に来る大文字をBにするかCにするかで決まる．よって，求める並べ方の個数は $12\times2=$**24 (通り)** ある．

**(3)**　アルファベットの一致する列のアルファベットは $a$ でなくてはならない．なぜなら，$a$ 以外のアルファベットがもし一致していたら，$a$ の列の少なくとも1つが一致してしまうからである．さて，第1行の並べ方を決めたとき，第2行の並べ方は，一致する $a$ の行の選び方と，もう片方の $a$ の下に来るアルファベット(BかC)の選び方で決まるので，$2\times2=4$ (通り) ある．よって，求める並べ方の個数は，$12\times4=$**48 (通り)** ある．

◀ $b$－Bなら $c$－Aであるが残りのAは $a$ の下に来てしまう．

## B. 309

6個の数字0，1，2，3，4，5のうち相異なる4個を用いて，首位の数が0でない4桁の整数を作るとき，できる数の総数，またそのうち偶数であるものの個数を求めよ．

**アプローチ** 制限条件のついた位から考察してゆきます．本問の場合，首位には「0でない」という制限条件がついています．

**解答** 首位(ここでは千の位)の数は1，2，3，4，5の5通りであり，それぞれの場合に対し，百の位以下は，残り5つの数から3個とる順列になるから ${}_5P_3$ 通りある．よって，総数は

$$5\times{}_5P_3=5\times5\times4\times3=\mathbf{300}\ (\text{個})$$

次に，偶数となる場合を考える．一の位の数に応じて場合分けをする．

首位の数のことも考えて場合分けする．

(i) 一の位の数が0のとき

十の位より上の数の並べ方は，1，2，3，4，5から3個とる順列になるから，

$${}_5P_3=5\times4\times3=60\ (\text{個})$$

ある．

(ii) 一の位の数が2または4のとき

千の位の数は，0と一の位に用いた数を除いた4通りあり，次に，百・十の位の数の並べ方は，残った4個の数から2個とる順列になるから，${}_4P_2$ 通りある．よって

$$4\times{}_4P_2=48\ (\text{個})$$

ある．

(i)，(ii)をまとめて，4桁の偶数は，

$$60+2\times48=\mathbf{156}\ (\text{個})$$

である．

[注]　6個の数字を単に並べる方法の個数(6!)から首位が0となる並べ方の個数(5!)を引く，というアプローチもむろん可能である．

## B.310

男子5人と女子2人を横に1列に並べるとき，次の条件を満たす並べ方はそれぞれ何通りあるか．
(1)　両端が男子である．
(2)　(1)の並べ方のうちで，女子の両隣りが男子である．
(3)　(2)の並べ方のうちで，特定の男女1組が隣り合う．

**アプローチ** (1)では，前問同様，制限条件のついた両端から並べていきます．(2)では，条件をどのようにとるかが(3)においても鍵になります．

**解答** **(1)**　まず，両端になる男子の決め方は ${}_5P_2$ 通りある．つぎに，残り5人をその間に並べる方法は ${}_5P_5$ 通りある．よって

$${}_5P_2 \times {}_5P_5 = 20 \times 120 = \mathbf{2400}\ (\text{通り})$$

である．

**(2)**　男子5人をまず並べる．その方法は ${}_5P_5$ 通りである．次に，女子2人を下の4か所の∧のうちの

㊚∧㊚∧㊚∧㊚∧㊚

2か所に入れる．その方法は ${}_4P_2$ 通りである．
よって

$${}_5P_5 \times {}_4P_2 = 120 \times 12 = \mathbf{1440}\ (\text{通り})$$

である．

**(3)**　(2)の並べ方は，次のように並べられた△と○

△○△○△○△○△

の印のついた席に，男子は△の席，女子は○の席につく方法と同じことである．

この場合，並べ方をきめるには，最初に「カップル」に席を決めさせ，次に残りの男子4人，残り1人の女子に席を決めさせればよい．

「カップル」の席の決め方は8通り，残りの男子の席の決め方は ${}_4P_4$ 通り，残りの女子の席の決め方は ${}_3P_1$ 通りである．よって

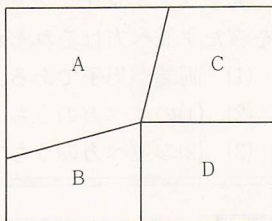
◀ 9つの席から2つ並んだ席を取る取り方の個数．

$$8 \times {}_4P_4 \times {}_3P_1 = 8 \times 24 \times 3 = \mathbf{576}\ (\text{通り})$$

である．

## B. 311

異なる4色がある．このうちの何色かを用いて，右の図形の四つの四角形を塗り分けるとき，塗り分け方は何通りあるか．

ただし，互いに辺を共有する2つの四角形には異なる色を塗ることにする．

**アプローチ**　使用する色の数によって場合分けをして考えます．

**解答**　2色で塗り分けるとき，AとD，BとCが同じ色であり，それらに塗る色の決め方は ${}_4P_2$ 通りある．

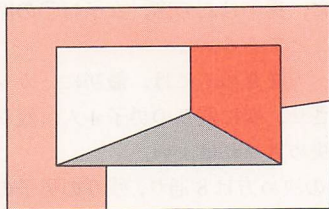
3色のとき，AとD，BとCのいずれか一方の組だけが同じ色となる．同じ色となる組の決め方が2通りで，あと，その組と残りの2つの四角形に3色を割り当てる場合の数は ${}_4P_3$ 通りあるから，全部で $2\times{}_4P_3$ 通りある．

4色のとき，4色をA，B，C，Dに割り当てる場合の数は ${}_4P_4$ 通りある．

以上より，塗り分け方の総数は

$${}_4P_2+2\cdot{}_4P_3+{}_4P_4=12+48+24=84\text{（通り）}$$

である．

[注]　そもそも，地図を塗り分けるには何色必要なのでしょうか？上の例では2色で塗り分けられましたが，

のような図では4色で塗り分けができ，また，4色以上が必要です．一般に，地球上の領域を地図にするとき，どのように境界線ができていても地図の塗り分けは4色で十分であることが近年，コンピュータによって証明されたというニュースを聞いた人もいるでしょう．

## B. 312

(1)　どの3点も同一直線上にない9点が平面上にある．このうちから3点を結んでできる三角形の個数はいくつか．

(2)　三角形の各辺を3分割したときの6点と3頂点のうちから3点を結んでできる三角形の個数は，いくつか．

**アプローチ**　同一直線上にない3点が指定されれば三角形が決まります．一方，3点が指定されても，同一直線上にあれば三角形ができません．

**(1)**　「どの3点も同一直線上にない」という仮定より，与えられた9個の点の中から，任意に3点を選べば，それを頂点とする三角形が決まる．

ゆえに，可能な三角形は，

$${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84\,(個)$$

である．

**(2)**　三角形の3頂点と6個の3等分点を合わせた9個の点について，もし，これらのどの3点も同一直線上にないなら，3点を選んでできる三角形は，(1)で示したように84個である．

しかし，実際には，三角形の一辺上に並ぶ，4点のうちから3個の点が選ばれたときには，三角形ができない．このような選び方は各辺について

$${}_4C_3=4\quad 通り$$

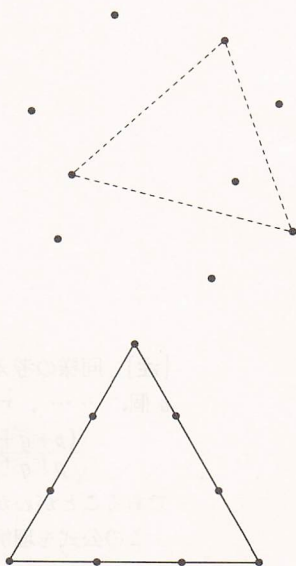
ずつあるから全体では

$$3\times4=12\quad 通り$$

ある．

よって，求める三角形の個数は

$$84-12=\mathbf{72}\,(個)$$

である．

## B. 313

赤玉5個，白玉3個，黒玉2個を1列に並べるとき，その並べ方は全部で何通りあるか．

**アプローチ** 同種のものを含む順列の個数の公式にあてはめることもできますが，ここでは公式の原点にたち戻って考えてみましょう．

**解答** 玉は全部で10個あるから，まず玉を置く場所10ヵ所を作る．

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

この中から，赤玉5個の入る場所を選ぶ場合の数は ${}_{10}C_5$ 通り，残り5ヵ所から白玉3個の入る場所を選ぶ場合の数は ${}_5C_3$ 通りであり，最後に残った2ヵ所に黒玉2個を入れると考える．

よって，求める並べ方の総数は，

$${}_{10}C_5\times{}_5C_3=\frac{10\,!}{5\,!\,(10-5)\,!}\cdot\frac{5\,!}{3\,!\,(5-3)\,!}$$

$$=\frac{10\,!}{5\,!\,3\,!\,2\,!}=\mathbf{2520}\ (\text{通り})$$

であることがわかる．

［注］ 同様の考え方に従うことにより，同種のものがそれぞれ $p$ 個，$q$ 個，……，$r$ 個あるときの順列の総数が

$$\frac{(p+q+\cdots\cdots r)\,!}{p\,!\,q\,!\cdots\cdots r\,!}\ (\text{通り})$$

であることがわかる．

この公式を理解した後でなら，次のように簡単な解答で十分である．

**別解** 玉は全部で10個あり，そのうち5個，3個，2個ずつが同種のものであるから，"同種のものを含む順列の個数の公式"によると，並べ方の総数は

$$\frac{10\,!}{5\,!\,3\,!\,2\,!}=\mathbf{2520}\ (\text{通り})$$

となる．

## B. 314

8個の玉を円形に並べるとき，次の各場合について，並べ方はそれぞれ何通りあるか．

(1)　8個の色がすべて互いに相異なるとき．

(2)　赤玉が4個，白玉が3個，黒玉が1個のとき，

(3)　赤玉が4個，白玉が2個，黒玉が2個のとき．

**アプローチ**　円順列では，回転して一致するものは同じ順列とみなします．したがって，並べるもののうちの1つを特定できる場合は，それを固定して，残りの並べ方を普通の順列として考えることができます．

**解答**　**(1)**　8個のうち任意の1個の位置を固定すると，並べ方はその1個から右まわりに残り7個を並べることに対応する．よって求める場合の数は

$7!=$**5040**(通り)

**(2)**　黒玉が1個であるから，この位置を固定すると，残りの7個をそこから右まわりに並べる場合の数と一致する．よって，求める場合の数は

${}_7C_4=$**35**(通り)

◁ 7ヵ所から赤玉をおく4ヵ所の選び方．

**(3)**　2つの黒玉の間にある玉の個数の多くない方を $k(0 \leqq k \leqq 3)$ とする．$k$ で分類する．

(i)　$k \leqq 2$ のとき：2つの黒玉を $k$ 個離して並べ，そのうちの一方を指定しておくと，この場合の並べ方はそこから残り6個をあいている所に右まわりに並べることに対応する．よって場合の数は

${}_6C_4=$**15**(通り)

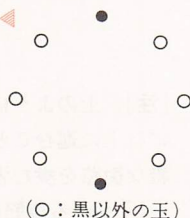
◁ 上と同様

(ii)　$k=3$ のとき：(i)と同様に黒玉の片方を指定して，そこから残り6個を右まわりに並べる方法は15通りある．回転で移り合うとすれば黒玉の配置より180°回転であるが，自分自身に移り合うのは黒玉の間の玉の配列がともに右まわりで赤赤白，赤白赤，白赤赤のいずれかになっている場合である．よって場合の数は

◁ (○：黒以外の玉)

$(15-3)\div 2+3=9$(通り)

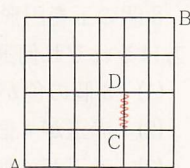
(i)(ii)あわせて

$3\times 15+9=$**54**(通り)

◁ $k \leqq 2$ なる $k$ は3通り

## B. 315

右図のような街路のある町で，A点からB点まで最短距離で行く道筋を考える．

(1)　このような道筋は何通りあるか．

(2)　CD 間が工事中で通り抜けることができないとき，道筋は何通りあるか．

**アプローチ** (2)では CD を通る道筋の個数を先に調べます．

**解答**　(1)　右に1区間進むことを $r$，上に1区間進むことを $u$ で表すことにする．

A点からB点まで最短距離で行くには $r$ を6回，$u$ を4回行うことになる．よって，その道筋は6個の $r$ と4個の $u$ を1列に並べることと1対1に対応する．よって，その並べ方は

同種のものを含む順列 ▶

$$\frac{10!}{6!4!}=\mathbf{210}\ (\text{通り})$$

ある．

(2)　(1)で求めた道筋のうち，CD を通る，つまり A→C→D→B と進むものを数える．(1)と同様に考えると，A→C の道筋は $\frac{5!}{4!1!}=5$ (通り)，

D→B の道筋は $\frac{4!}{2!2!}=6$ (通り) あるので，結局，CD を通る道筋は $5\times6=30$ (通り) ある．

CD を通らない道筋は全体からこれらを除いたものだから，

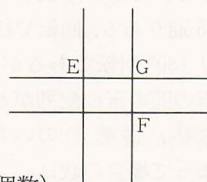
$$210-30=\mathbf{180}\ (\text{通り})$$

ある．

[注]　上のように，横方向には右，縦方向には上に進むことにするならば，もっと複雑な街路を歩む場合でも，

(G へ至る道筋の個数)

$=$(E に至る道筋の個数)$+$(F に至る道筋の個数)

なる式を何度も用いることによって，出発地から目的地までの道筋の個数を計算することが出来る．

## B.316

一辺の長さが4の立方体ABCD-PQRSがある．ただし，2つの正方形ABCD，PQRSは立方体の向かい合った面で，AP，BQ，CR，DSはそれぞれ立方体の辺である．

いま，立方体は一辺の長さ1の小立方体に積木状に区切られているとする．そこで，頂点Aから頂点Rへ小立方体の辺をたどっていくときの最短径路を考える．

(1)　頂点Aから頂点Rへ最短径路は何通りあるか．

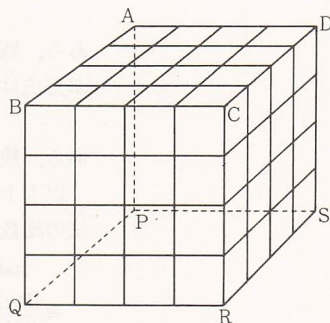
(2)　辺BC上の点を通過する最短径路は何通りあるか．

**アプローチ**　(2)の径路は(1)の径路のうちの特別な場合には違いありませんが，別のとらえ方をした方がすっきりします．

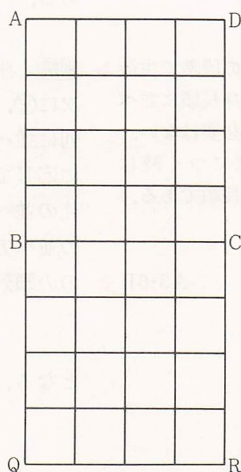
**解答**　(1)　AB方向に長さ1進むことを$a$，AD方向に長さ1進むことを$b$，AP方向に長さ1進むことを$c$で表すと，AからRへの最短径路は，4つの$a$，4つの$b$，そして4つの$c$を一列に並べる方法と1対1に対応する．

したがって，この並べ方を数えると

$${}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 \cdot {}_4C_4 = \mathbf{34650}\ (\text{通り})$$

ある．

(2)　辺BC上の点を通過する最短径路とはすなわち，立方体の面ABCDとBCRQを取り出した長方形ABQRCDにおける，AからRへの最短径路のことに他ならない．AQ方向に長さ1進むことを$d$，AD方向に長さ1進むことを$e$，で表すと，この長方形におけるAからRへの最短径路は，8つの$d$，4つの$e$を1列に並べる方法と1対1に対応する．この並べ方を数えると

$${}_{12}C_8 \cdot {}_4C_4 = \mathbf{495}\ (\text{通り})$$

ある．

## B. 317

$n$を自然数とする，$3n$名の生徒がいて，互いに身長は異なるとする．教室には$n$個からなる席の列が3列ある．身長の低い者が高い者より前に来るような席順は何通りあるか．

**アプローチ** 席の列のそれぞれに対し，その列の席につく生徒$n$名を定めれば，あとは背たけの順に座らせて席順が決まります．

**解答** $3n$名を各$n$名からなるグループA，B，Cに分け，A，B，Cの各グループをそれぞれ(黒板に向かって)左側の列の席，中側の席，右側の席に身長順につかせれば，席順が決まる．

$3n$名の中から，Aに属する$n$名を選ぶ方法は

$${}_{3n}C_n \text{ 通り}$$

ある．残りの$2n$名の中から，Bに属する$n$名を選ぶ方法は

$${}_{2n}C_n \text{ 通り}$$

ある．残りの$n$名はCに割り当てる．

以上より，$3n$名をグループA，B，Cに分ける方法の総数，すなわち，席順の総数は

$${}_{3n}C_n \cdot {}_{2n}C_n$$

$$=\frac{(3n)!}{(n!)^3} \text{（通り）}$$

ある．

この段階で生徒を身長順に並べる必要はない．(席につく時は身長順である．)

**別解** 生徒をまず1列に並べ，その順序を固定する．次に㊧，㊥，㊨という札をそれぞれ$n$枚用意して1列に並べ，端から順に札を一枚ずつ取らせてその札に応じて座らせれば，席順が決まる．この決め方で札の並べ方と席順は一対一に対応しているので，札の並べ方の総数を求めると，同じものが含まれるものの順列の数の公式より

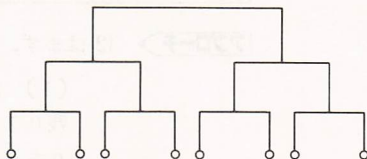
A3・6II

$$\frac{3n!}{(n!)^3} \text{（通り）}$$

となる．

## B. 318

$n$を自然数とする．$2^n$人の棋士がトーナメント方式(勝ち抜き戦のこと)で対戦をする．トーナメントの組み方は何通りあるか．ただしシードされる棋士はいない．

**アプローチ** トーナメントの組み方を図にすると，たとえば $n=3$ の時は右のようになります．組み方の総数を数えるには，┌─┐の左右を入れ替えても同じ試合であることに注意する必要があります．

**解答** まず，横一列に並んでもらう．その並び方に応じて，端から2人ずつ対になって対局し，勝った者だけ元の列に残って，再び端から2人ずつ対になって対局する．これを繰り返すと，1つのトーナメントが決まることになる．ここで，対になる2人のうち左側の者が常に上座に座ることにすれば横一列に並ぶ並び方と，各対局において座る位置を指定したトーナメントとは一対一に対応する．

◁上の図の一番下のところに並ぶ，と考える．

横一列の並び方の総数は $2^n!$ 通りあり，一方1つのトーナメントにおいて，対局数は $2^n-1$ であるから，座る位置の決め方は $2^{(2^n-1)}$ 通りある．

◁(対局数)
=(敗者の数)
=(全棋士数)
−(優勝者数)

したがって，トーナメントの組み方は全部で

$$\frac{2^n!}{2^{(2^n-1)}}\text{(通り)}$$ ある．

**別解** $2^n$ 人の棋士を $2^{n-1}$ 人ずつ2つの組に分けることにより$n$回戦の組合せを決め，次に，これらの組をそれぞれ $2^{n-2}$ 人ずつ2つの組に分けることによって $(n-1)$ 回戦の組合せを決め，順に同様にして1回戦まで組合せを決める．

◁$2^n$ 人いれば，$n$ 回戦が決勝戦

$2^n$ 人を $2^{n-1}$ 人ずつ2つの組に分ける方法は ${}_{2^n}C_{2^{n-1}}\times\frac{1}{2}$ 通りあるから，$2^n$ 人の場合のトーナメントの総数を $T_n$ とおくと $T_n=\frac{1}{2}\cdot{}_{2^n}C_{2^{n-1}}\cdot(T_{n-1})^2$ という関係式を得る．これから解を求めることは容易である．(漸化式(数Aで学ぶ)を解くことになる)

◁$2^{n-1}$ 人を選び出す方法は ${}_{2^n}C_{2^{n-1}}$ 通り

## B. 319

12人の生徒を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか．

(1) 5人，4人，3人の3組に分ける．

(2) 4人づつ3組に分ける．ただし，組の区別をしない．

**アプローチ** (2)はまず，組に区別がついているものとして考えます．

**(1)** 5人の組に入る生徒の選び方は ${}_{12}C_5$ 通りあり，残り7人から4人の組に入る生徒の選び方は ${}_7C_4$ 通りあり，残りを3人の組にする．よって

$${}_{12}C_5 \times {}_7C_4 = \frac{12!}{5!7!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = \mathbf{27720} \text{ (通り)}$$

である．

**(2)** 最初は，3組がA組，B組，C組と区別されているとして考える．

(1)と同様に，A組の4人，次にB組の4人と順に選ぶと，分け方の総数は，

$${}_{12}C_4 \times {}_8C_4 = \frac{12!}{4!8!} \cdot \frac{8!}{4!4!} = 34650 \text{ (通り)}$$

であることがわかる．

一方，組を区別しないで4人ずつ3組に分ける場合の数がN通りあるとすれば，これら3組をA，B，C 3組に振り分ける場合の数は $N \times 3! = 6N$（通り）である．したがって求める場合の数は

$$N = 34650 \div 6 = \mathbf{5775} \text{ (通り)}$$

である．

**(2)の** 別解 12人の生徒のうち，特定の1人甲に着目する．

甲と同じ組に入る3人の生徒の選び方は ${}_{11}C_3$ 通りあり，あと残り8人を4人ずつ2組に分ける．

残り8人の生徒のうち，特定の1人乙に着目し，乙と同じ組に入る生徒3人を選ぶ場合の数は ${}_7C_3$ 通りである．これで8人は4人ずつ2組に分かれる．

よって，求める場合の数は

$${}_{11}C_3 \times {}_7C_3 = \frac{11!}{3!8!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = \mathbf{5775} \text{ (通り)}$$

である．

## B.320

正方形の各辺の5等分点を通り，辺に平行な線を引くことによってできる長方形はいくつあるか．また，正方形はいくつできるか．

**アプローチ** 縦の平行線2本と横の平行線2本によって囲まれる長方形がちょうど1つ存在します．その長方形が正方形となるのは，縦，横の平行線の間隔が一致するときです．

**解答** 縦の平行線を $a_1$, $a_2$……, $a_6$ 横の平行線を $b_1$, $b_2$……, $b_6$ とする．$a_i(1\leqq i\leqq 6)$ から2本，$b_j(1\leqq j\leqq 6)$ から2本とると，それらによって囲まれる長方形はちょうど一つ存在する．

逆に，一つの長方形に対し，その4辺を定める縦と横の平行線の組はちょうど一つ存在する．

よって，求める長方形の個数は，$a_i(1\leqq i\leqq 6)$ から2本，$b_j(1\leqq j\leqq 6)$ から2本を選ぶ場合の数となる．
すなわち，

$${}_6C_2\times{}_6C_2=15^2=\mathbf{225}\ (\text{個})$$

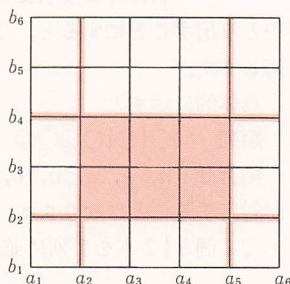
となる．

正方形については，辺の長さで分類する．

元の正方形の1辺の長さを5とする．
1辺の長さが $k(1\leqq k\leqq 5)$ の正方形の個数は，縦の平行線を幅を$k$あけて2本，横の平行線を幅を$k$あけて2本選ぶ場合の数である．縦，横いずれの場合も，幅$k$の平行線の組の取り方は $6-k$ 通りだから，1辺が$k$の正方形の個数は $(6-k)^2$ 個ある．

以上より，求める正方形の個数は，
$k=1$, 2, 3, 4, 5 の場合を全部あわせて

$$5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=\mathbf{55}\ (\text{個})$$

となる．

## B. 321

$a$，$b$，$c$ 3文字から重複を許して，7個とり出す組合せの個数を求めよ．

**アプローチ** この組合せの個数は○7個と，|(棒) 2本を1列に並べる順列の個数に等しいことが，次のようにしてわかります．

○7個，| 2本の順列に対して，

左の棒より左にある○の個数だけの $a$

2本の棒の間にある○の個数だけの $b$

右の棒より右にある○の個数だけの $c$

をとり出すことにすると，この順列と考えている組合せは1対1に対応します．

具体的に示すと

順列 ○○|○|○○○○ には組合せ $a$，$a$，$b$，$c$，$c$，$c$，$c$

組合せ $a$，$a$，$a$，$a$，$b$，$b$，$b$ には順列 ○○○○|○○○|

が対応することになります．

○7個と| 2本を1列に並べる順列の個数は，9ヵ所の場所から|の入る2ヵ所を選ぶ場合の数に等しいから $_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36$ (通り) です．これが，求める組合せの個数となります．

一般に，$n$ 種のものから重複を許して $r$ 個とり出す(重複組合せ)の個数は，$r$ 個の○と，$(n-1)$ 本の|を1列に並べる順列の個数に等しいことが同様にして確かめられます．これより，**重複組合せの公式**

$$_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$$

を得ます．

**解答** $a$，$b$，$c$ 3文字から重複を許して7個とり出す組合せの個数は，重複組合せの公式から

$$_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=\mathbf{36}\ \textbf{(通り)}$$

である．

$_nC_r={}_nC_{n-r}$ を用いた．

**研究** (i)「$x+y+z=7$ かつ $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ を満たす $x$，$y$，$z$ の整数解の個数」

(ii)「区別のない7個のボールを3人の子どもに分けるとき，ボールを貰わない子がいることも許した分け方の場合の数」

いずれも，上で求めた $_3H_7$ と一致する．

## B.322

組合せの個数 ${}_nC_r$ の意味に従って，次の各式が成り立つことを示せ．

(1)　${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$

(2)　$${}_{2n}C_r=\begin{cases}{}_nC_0\cdot{}_nC_r+{}_nC_1\cdot{}_nC_{r-1}+\cdots\cdots+{}_nC_r\cdot{}_nC_0 & (0\leqq r\leqq n \text{ のとき})\\ {}_nC_{r-n}\cdot{}_nC_n+{}_nC_{r-n+1}\cdot{}_nC_{n-1}+\cdots+{}_nC_n\cdot{}_nC_{r-n} & (n+1\leqq r\leqq 2n \text{ のとき})\end{cases}$$

**アプローチ**　互いに区別できる $n$ 個の要素をもつ集合，たとえば，1から $n$ までの自然数からなる集合を考える．

**解答**　$n$ 個の要素をもつ集合Aを考える．

**(1)**　Aの特定の要素 $a$ をとる．Aから $r$ 個の要素を選ぶ方法を，$a$ を含むか否かで分類する．$a$ を含む選び方は，残りの $(n-1)$ 個から $(r-1)$ 個を選ぶ方法と同等であり，${}_{n-1}C_{r-1}$ 通りある．一方，$a$ を含まない選び方は，残りの $(n-1)$ 個から $r$ 個を選ぶ方法と同等であり，${}_{n-1}C_r$ 通りある．したがって，${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ である．

**(2)**　Aを $n$ 個ずつの2グループP，Qに分けておく．Aから $r$ 個の要素を選ぶ方法を，Pから選ぶ要素の個数で分類する．Pから $k$ 個選ぶとき，Qからは $r-k$ 個選ぶ．その方法は ${}_nC_k\cdot{}_nC_{r-k}$ 通りある．ここで，$k$ の取りうる値は，$0\leqq k\leqq n$，$0\leqq r-k\leqq n$ を同時に満たす $k$ であるから，その範囲は，

◀ PとQから要素を選んでいる．

　$0\leqq r\leqq n$　　のとき　$0\leqq k\leqq r$

　$n+1\leqq r\leqq 2n$ のとき　$r-n\leqq k\leqq n$

である．これらの $k$ について，上の結果を足し合わせると，求める結果を得る．

[注]　(2)は2つの場合に応じて，式がずいぶん違うように見えるが，解答で示したように，その違いは，単に，$k$ の範囲を表す不等式の形の違いを反映したものである．また，p.96 の公式 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ を思いおこせば，(2)の下の式は，$r$ の代りに $2n-r$ を考えることによって，上の式から証明できる．同様に，下の式から上の式を導くこともできる．

## B. 323

(1) 次の関係式を満たす $n$ と $r$ の値を求めよ．

$${}_{n-1}\mathrm{C}_r : {}_n\mathrm{C}_r : {}_{n+1}\mathrm{C}_r = 1 : 5 : 20$$

(2) 次の不等式を満たす $r$ を $n$ を用いて表せ．

$${}_n\mathrm{C}_{r-1} < {}_n\mathrm{C}_r,\quad {}_n\mathrm{C}_r \geqq {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

**アプローチ** ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ を確認する問題です．

**解答** (1) $\begin{cases} {}_{n-1}\mathrm{C}_r : {}_n\mathrm{C}_r = 1 : 5 & \cdots\cdots ① \\ {}_n\mathrm{C}_r : {}_{n+1}\mathrm{C}_r = 5 : 20 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

という2つの方程式に分けて考えると，

$n-1 \geqq r \geqq 0$ の下で

$$① \iff \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} = 1 : 5$$

$$\iff \frac{n!}{r!(n-r)!} = 5\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$$

$$\iff n = 5(n-r) \iff 4n - 5r = 0 \quad \cdots\cdots ③$$

$$② \iff \frac{n!}{r!(n-r)!} : \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = 5 : 20$$

$$\iff \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = 4\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\iff n+1 = 4(n+1-r) \iff 3n - 4r = -3 \quad \cdots ④$$

③，④より　$\boldsymbol{n=15}$，$\boldsymbol{r=12}$

これは $n-1 \geqq r \geqq 0$ を満たす．

(2) $n-1 \geqq r$，$r \geqq 1$ の下で

$${}_n\mathrm{C}_{r-1} < {}_n\mathrm{C}_r$$

$$\iff r < n - r + 1 \iff r < \frac{n+1}{2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

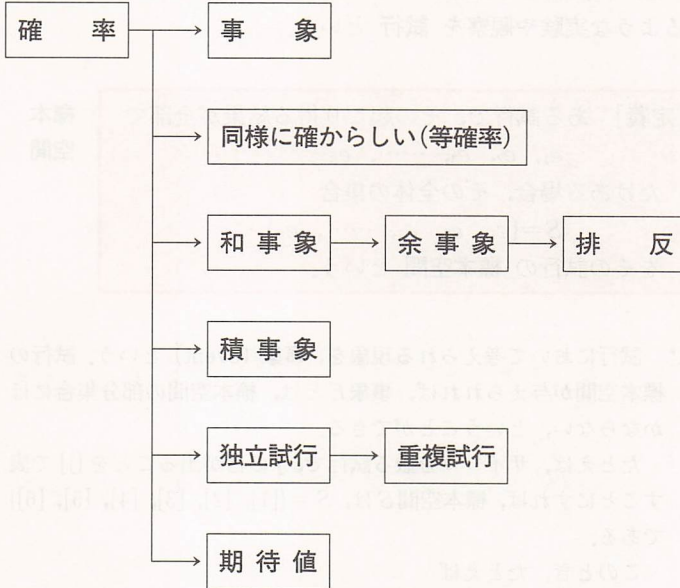
途中の計算は省いてある．

$${}_n\mathrm{C}_r \geqq {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

$$\iff r + 1 \geqq n - r \iff r \geqq \frac{n-1}{2} \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって，$n$ が奇数のとき　$r = \boldsymbol{\dfrac{n-1}{2}}$

$n$ が偶数のとき　$r = \boldsymbol{\dfrac{n}{2}}$

[注] $(x+1)^n$ を展開したときの係数（2項定理 A3.9）についての1つの事実を表している．具体例について確認してほしい．

## A 4.1 試行と事象

サイコロを振って出た目の数を調べる実験や，1日にある商店にかかってくる電話の通話数を調べるという観察を行うとき，その結果は偶然に支配されていろいろ変わり，どの結果が得られるかを断定的に予測することはできない．

一般に，何回もくり返すことができ，その結果が偶然に支配されるような実験や観察を **試行** という．

**標本空間**

［**定義**］ある試行で，その起こり得る結果が全部で

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \cdots\cdots,\ e_n$$

だけある場合，その全体の集合

$$S=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ \cdots\cdots,\ e_n\}$$

をその試行の **標本空間** という．

1°　試行において考えられる現象を，**事象** (event) という．試行の標本空間が与えられれば，事象$E$とは，標本空間の部分集合にほかならない，ということができる．

たとえば，サイコロを振る試行で，j の目が出ることを [j] で表すことにすれば，標本空間$S$は，$S=\{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$である．

このとき，たとえば

偶数の目が出るという事象は，　$\{[2],\ [4],\ [6]\}$

3以下の目が出るという事象は，　$\{[1],\ [2],\ [3]\}$

である．

2°　例1　出生児が男児か女児かという観察において，“出生児が男児”という事象を $e_1$，“出生児が女児”という事象を $e_2$ とすれば，$S=\{e_1,\ e_2\}$ がこの観察の標本空間である．

例2　1日にある商店にかかってくる電話の通話数を調べる観察では，通話数が$n$であることを，数$n$で表すことにすれば，標本空間は $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots\}$ である．たとえば，この部分集合 $\{n|50\leqq n\leqq 100\}$ は，1日にかかってくる電話が50本以上100本以下であるという事象を表す．

3°　標本空間のことを，**事象空間** とか実験結果の **全体集合** などともいう．

　また，$S$ それ自身も $S$ の部分集合の1つである．この意味で，標本空間(に対する事象)を **全事象** ともいう．全事象は必ず起こる．

4°　空集合 $\phi$ も標本空間 $S$ の部分集合の1つである．これを **空事象** という．空事象 $\phi$ は現実には起こることのない事象である．

5°　標本空間 $S$ の1つ1つの要素を **根元事象** という．それに対し，複数の要素からなる部分集合を複合事象という．

## A 4.2　確率の意味

　確率の概念には，すでに中学でなじんでいる．その意味を復習しておこう．試行において着目する事象の **起こりやすさを数で表現** するために，試行を何回も行ったとき，全回数に対して $E$ が **起こる回数の理論的な割合** を考える．つまり，

$$N = \text{試行の回数}, \qquad r = E \text{ の起こった回数}$$

とおくとき，$N$ を限りなく大きくするにつれて，$\dfrac{r}{N}$ はある一定な値 $p$ に近づくと考えられるとき，「$E$ の起こる確率は $p$ である」というのである．

　事象 $E$ の確率を記号 $P(E)$ で表す．

1°　記号 $P(E)$ の $P$ は probability (＝確率) から来ている．

2°　$0 \leqq r \leqq N$ であるから，つねに $0 \leqq p \leqq 1$ である．

◆基本的な事象の確率◆

　具体的な事象の確率を数値的に求めることは一般に簡単ではない．たとえばサイコロを振る実験では，サイコロが正しく

作られていれば

$$P(1\text{の目の出る})=P(2\text{の目が出る})=\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots=P(6\text{の目が出る})=\frac{1}{6}$$

であることは中学で学んでいるが，いびつなサイコロとなると，おのおのの目の出る確率を知るためには，実験をくり返して相対度数の変化を観察するより仕方がない．

## Ⅰ．統計的確率

1°　自然科学の世界では，実験や観察が繰り返し可能である場合に，確率を考えることが多い．すでに行われた実験や観察の結果にもとづいて推測された確率の値を，**統計的確率** という．これは，多数回の試行の結果の統計から経験的に求められた確率の値のことである．

2°　現実に事象$A$の起こる統計的確率を求めるには，$N$を限りなく大きくしなければならないが，それは不可能であるから，実際には，ある程度$N$を大きくしたときの $\dfrac{r}{N}$ の値を$P$の値として採用するのが普通である．

［例］　1年間の世界各国の出生児数$N$に対する男児数$r$の相対度数 $r/N$は，どの年をとってみても，また，どの国についてもほとんど変わりがなく，

$$\frac{r}{N}\fallingdotseq 0.51$$

であることが知られている．

この統計にもとづいて，出生児が男児か女児かという観察において

$$S=\{e_1,\ e_2\},\ \text{ただし},\ e_1=\text{男},\ e_2=\text{女}$$

とおくとき，

"男児が出生する" 確率$=P(e_1)=0.51$

"女児が出生する" 確率$=P(e_2)=0.49$

などと仮に決めて，推論を進めることにするわけである．

## Ⅱ．組合せ論的確率（数学的確率）

「正しい」サイコロを振る試行のように，実験によって推測するのではなく，対称性などの理論的根拠から，事象の確率を "場合の数の計算" に帰着して求めることがある．その場合

のよりどころになるのは，いくつかの事象の起こりやすさが等しいこと，すなわち，いくつかの事象の起こり方が

同様に確からしい (equiprobable＝equally likely)

と認識することである．

たとえば，正しいサイコロをふるとき，どの目が出ることも同様に確からしい．

1°

> **[公式]** ある試行において起こり得る根元事象が全部で$N$個あり (標本空間が$N$個の要素からなっており)，それらのどれが起こることも同様に確からしいとする．このとき，試行にともなう事象$E$が$r$個の根元事象からなっているときには，$E$の確率は
>
> $$P(E)=\frac{r}{n} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$
>
> で与えられる．

**数学的確率の公式**

2° とくに，$e_j$を等確率の(根元)事象のうちの任意の1つとすると，

$$P(e_j)=\frac{1}{N} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

3° 例 1つのサイコロを振った場合，サイコロに特別の仕掛でもない限り，1の目から6の目までのどの目が出ることも同程度に期待されるから，

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \qquad (要素の個数=6)$$

は等確率の根元事象からなる標本空間である．そこで，

$A=\{1\}$，$B=\{5,\ 6\}$ に対して，

事象$A$の起こる確率＝“1の目が出る”確率＝$P(A)=\frac{1}{6}$

事象$B$の起こる確率＝“5以上の目が出る”確率＝$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

4° 当然ながら，①を適用するには“等確率の事象である”という条件を忘れてはならない．

例 1つのサイコロを振ったとき，1の目が出るか出ないかの

2つの場合が考えられるから，"1の目が出る確率は1/2である"などとしては誤りである．

5°　ある試行の結果が，等確率の(根元)事象に分解できる場合には，確率を求める問題は，その事象に対応する場合の数を求める問題に帰着することになる．

6°　①によって算出される確率を，歴史的な習慣により，数学的確率というが，すべての確率は"数学的"であるから，むしろ，組合せ論的確率とよぶ方がよい．確率論が始められた頃の人達の感覚では，"数式で与えられる確率①が数学的"であったのであろう．今日の立場では，統計的確率も数学的確率も，現実の事象に対して，その確率の説得的な提供をする手段にすぎない．

## A 4.3　確率の計算

確率の基本性質とそれから導かれる定理，いろいろな用語など，確率の計算に便利なものをまとめておこう．

[まとめ]　任意の事象$E$に対し，　$0 \leqq P(E) \leqq 1$
全事象$S$は必ず起こり，　$P(S)=1$
空事象$\phi$は決して起こらず，　$P(\phi)=0$
である．

**確率の基本性質**

### I．余　事　象

ある試行において1つの事象$E$を考えるとき，"$E$が起こらない"というのも1つの事象である．これを$E$の余事象といい，$\overline{E}$で表す．

たとえば，サイコロを振る試行で，$E=$"偶数の目が出る"という事象とおけば

$\overline{E}=E$ の余事象＝“偶数の目が出ない”という事象
＝“奇数の目が出る”という事象

である．

標本空間で $\overline{E}$ を表す集合は，$E$ を表す集合の補集合である．

［定理］ 事象 $E$ の余事象を $\overline{E}$ とすれば，
$P(\overline{E})=1-P(E)$

**余事象の確率**

## II．和事象，積事象

ある試行にともなう２つの事象 $A$，$B$ が与えられるとき

$A$ または $B$ の少なくとも一方が起こるという事象

を，$A$ と $B$ の **和事象** といい，$A\cup B$ で表す．

標本空間において和事象 $A\cup B$ を表す集合は，$A$，$B$ のそれぞれを表す集合の和集合である．

また，このとき

$A$ と $B$ がともに起こる（$A$ が起こり，かつ $B$ も起こる）という事象

を，$A$ と $B$ の **積事象** といい，$A\cap B$ で表す．

標本空間において積事象 $A\cap B$ を表す集合は，$A$，$B$ のそれぞれを表す集合の積集合＝共通部分である．

1°［例］ 甲，乙２人がジャンケンをする試行において

$A=$“甲が勝つ”という事象

$B=$“乙が勝つ”という事象

とおけば，和事象 $A\cup B$ は，“甲，乙どちらかが勝つ”，すなわち，“引分けではない”という事象を意味する．この場合，積事象 $A\cap B$ は空事象である．

また，この試行において

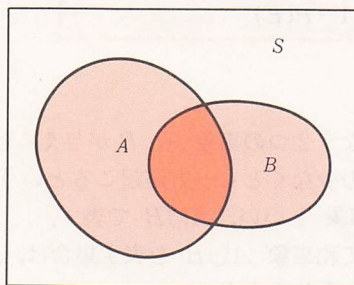
$E=$“甲がイシを出す”という事象

$F=$“乙がハサミを出す”という事象

とするとき，積事象 $E\cap F$ は“甲がイシを出し，乙がハサミを出す”という事象を意味する．

2°　集合の要素の個数の関係 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ に対応して，和事象，積事象の確率に関しては次の関係が成り立つ．

［公式］
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

**和事象の確率**

## Ⅲ．排反事象

$A\cap B=\phi$（空集合）のとき，すなわち，$A$，$B$ が同時には起こり得ないとき，$A$ と $B$ とはたがいに **排反** である，または **排反事象** であるという．

$A\cap B=\phi$ ならば，$P(A\cap B)=P(\phi)=0$ となり，次の定理を得る．

［定理］ $A$，$B$ がたがいに排反事象ならば，
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

**排反事象の加法定理**

（2つの事象の場合）

1°　この定理は，$A$，$B$ がたがいに排反事象なば，
（$A$，$B$ の少なくとも一方が起こる確率）=（$A$が起こる確率）+（$B$が起こる確率）
であるということを意味する．

2°　この定理は，場合の数を求めるときの「和の法則」に対応する．

## A 4.4 独立な試行

I．

> [定義]　2つの試行 $T_1$，$T_2$ について，それぞれの試行の結果が，他方の試行の結果(の出方)と無関係であるとき，$T_1$ と $T_2$ は独立な試行であるという．

1°　例1　表裏の出方に着目して，100円玉を投げる試行を $T_1$ とし，ついで，10円玉を投げる試行を $T_2$ とする．100円玉の表裏の出方と10円玉の表裏の出方は互いに影響がない．したがって，この $T_1$ と $T_2$ は独立である．

例2　大小の2つのサイコロを投げる．大きいサイコロを投げる試行を $T_1$，小さいサイコロを投げる試行を $T_2$ とする．大小のサイコロの目の出方は無関係であるから，$T_1$ と $T_2$ と独立な試行である．

例3　9本の空クジと1本の当りクジからなる10本のクジがある．いま，花子と太郎の両人が，花子が最初に，ついで太郎が，それぞれ1本ずつこのクジを引く．花子がクジを引く試行を $T_1$，太郎がクジを引く試行を $T_2$ とする．このとき，$T_1$ と $T_2$ は独立ではない．たとえば，$T_1$ で当りクジが引かれてしまうと $T_2$ では空クジしか出ない．また，$T_1$ で空クジが出た場合には $T_2$ では9本のうちの1本の当りクジが出る可能性がある．たしかに，$T_1$ と $T_2$ は独立でない．(このようなとき，2つの試行は従属であるということがある．)

例4　バスケットの試合でA君が2回フリー・スローを行う．1回目のスローを $T_1$，2回目のスローを $T_2$ とする．$T_1$，$T_2$ のそれぞれにおいて結果は“入る”か“入らない”かである．2つの試行 $T_1$ と $T_2$ が独立であるかどうかは，A君の気質に依存する．第1投が入ると安心して第2投がうまくいくが，第1投が失敗すればプレッシャーが高まり第2投も失敗しやすい——という気質ならば，$T_1$ と $T_2$ は独立ではない．

一方，A君がプレッシャーに強いが，2投目の方がねらいがさだまりやすいため，第1投が入る確率が0.6，第2投が入る確率が0.8であると仮定しよう．このときは，第1投の結果いかんによらず，第2投が入る確率が0.8なのであるから，2つの試行は独立である．

2°　2つ以上の試行についても独立性が考えられる．すなわち，$n$ 個の試行 $T_1$，$T_2$，……，$T_n$ が(たがいに)独立な試行であるとは，それぞれの試行の結果が他の試行の結果(の出方)に影響をおよぼさないことである．

例1　サイコロを3回つづけて振るとき，各回の“振り”をそれぞれ試行とみなして，$T_1$，$T_2$，$T_3$ とおけば，これらは独立な試行である．

例2　同じクラスの3人の生徒甲，乙，丙がセンター試験を受けた．それぞれの成績を試行 $T_1$，$T_2$，$T_3$ とみなせば，常識的には $T_1$，$T_2$，$T_3$ は独立な試行である．

**◆独立な試行と確率◆**　独立な試行における確率について，次の乗法定理が成り立つ．

> **[定理]**　独立な試行 $T_1$，$T_2$ を行ったとき，
> “$T_1$ では事象 $A$ が起り，かつ，
> $T_2$ では事象 $B$ が起る．”　……(＊)
> という事象 $E$ の確率は $P(A)\times P(B)$ である．

**独立試行の乗法定理**

1°　例1　大小2つのサイコロをふるとき，大きいサイコロの目が1であり，小さなサイコロの目が5である確率は，上の乗法定理にしたがえば

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

である．それぞれのサイコロだけに着目したときの試行は独立であり，

$$P(\text{大きいサイコロの目が}1)=\frac{1}{6}$$

$$P(\text{小さいサイコロの目が}5)=\frac{1}{6}$$

としてよいからである．

もちろん，2つのサイコロを投げることを一つの試行 $S$ とみなし，$S$ における36個の根元事象 $[1, 1]$, $[1, 2]$, …… $[6, 5]$, $[6, 6]$（$[m, n]$ は大きいサイコロの目が $m$，小さいサイコロの目が $n$ となる事象)が，すべて同様に確からしいとして扱うこともできる．このときは

$P([1,\ 5])=\dfrac{1}{36}$

が直接得られる．

例2　上の例で

$A=$“大きいサイコロの目が偶数”

$B=$“小さなサイコロの目が4以下”

とするとき，上の乗法定理により

$$P(A\text{かつ}B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

と計算することができる．

この場合も，上の例の試行$S$の根元事象のうち，該当する目の出方が$[2,\ 1]$，$[2,\ 2]$，$[2,\ 3]$，$[2,\ 4]$，$[4,\ 1]$，$[4,\ 2]$，……，$[6,\ 3]$，$[6,\ 4]$の12通りであることを直接考慮して

$$P(A\text{かつ}B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

と扱うことも可能である．

2°　3つの独立な試行$T_1$，$T_2$，$T_3$のそれぞれについて，事象$A$，$B$，$C$が起こる確率，すなわち，“$A$かつ$B$かつ$C$”という事象の確率は

$$P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

で与えられる．もっと多くの独立な試行についても同様である．

3°# 独立でない事象$T_1$，$T_2$について，$T_1$では事象$A$が，$T_2$で事象$B$が起こるという事象，すなわち“$A$かつ$B$”という事象の確率を$P(A)\cdot P(B)$と計算することはできない．このような場合の扱いについては，「数学B」における **条件付き確率** あるいは条件付き確率の乗法定理の項目で学ぶ．

(先取りして)簡単に方針だけ示すと，まず

$T_1$で$A$が起ったとしたとき，$T_2$で$B$の起こる確率

$\equiv P_A(B)$

を求める．そうして

$$P(A\text{かつ}B)=P(A)\cdot P_A(B) \quad\cdots\cdots\ ②$$

により計算するのである．

たとえば，$p.131$頁の1° 例3の場合に

$A=$“花子が空クジを引く”

$B=$“太郎が当りクジを引く”

とおけば，$A$ が起ったときには，1本の当りクジと8本の空クジが残っている．その中から太郎が1本を引くのであるから，それが当りクジである確率は $\frac{1}{9}$ である．すなわち

$$P_A(B)=\frac{1}{9}.$$

一方，$P(A)=\frac{9}{10}$ であるから②により

$$P(A\text{かつ}B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

4°# $T_1$，$T_2$ が独立でなくても，事象 $A$，$B$ によっては

$$P(A\text{かつ}B)=P(A)\cdot P(B) \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことがある．このときでも，2つの事象 $A$，$B$ は独立であるという．

さらに，一つの試行 $T$ にともなう2つの事象 $A$，$B$ についても③が成り立つときは，事象 $A$，$B$ は独立であるという．

たとえば，1つのサイコロを振る試行を $T$ として，

$A$＝"出た目の数が偶数である"
$B$＝"出た目の数が5以上である"
$C$＝"出た目の数は4以上である"

とおく．このとき

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

である．また

"$A$かつ$B$"＝"出た目の数が6"
"$A$かつ$C$"＝"出た目の数が4または6"

であるから

$$P(A\text{かつ}B)=\frac{1}{6},\quad P(A\text{かつ}C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

は直接にわかる．ところが

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\quad P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

よって，事象 $A$ と $B$ は独立であるが，事象 $A$ と $C$ は独立ではない．

5°　上の"$A$かつ$B$"という事象は前節の用語法に合せれば $A$ と $B$ の積事象 $A\cap B$ である．試行 $T_1$，$T_2$ が独立なときは，$T_1$ にともなう任意の事象 $A$ と $T_2$ にともなう任意の事象 $B$ とは独立であり，

そうして

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

が成り立つということができる．

## II．重複試行（反復試行）の確率

1つのサイコロを3回投げるときのように，同じ試行をくり返して行うことを，一つの試行とみなし，もとの試行の **重複試行** という．もとの試行を $T$，くりかえす回数を $n$ とするとき，この重複試行の各回の（$T$ と同じものであるが）試行を $T_1$，$T_2$，……，$T_n$ で表せば，$T_1$，$T_2$，……，$T_n$ は独立である．

1回の試行で，ある事象 $A$ に着目し，それが起る確率を $p$ とする．このとき，$n$回の試行の間，$A$ ばかりが起こる確率は乗法定理によって

$$P(A\text{ばかり}n\text{回起こる})=\underbrace{P(A)\times P(A)\times\cdots\cdots\times P(A)}_{n\text{個}}$$

$$=p^n$$

である．

いま，事象 $B$ を $A$ の余事象とすれば

$$P(B)=P(A\text{が起こらない})=1-p$$

である．$1-p$ を $q$ とおく．すなわち

$$P(B)=q \qquad (p+q=1)$$

さて，$n$ 回の試行のうち，$A$ が2回起こり，$B$ が $n-2$ 回起こるという事象を $E_2$ とおいて，その確率を求めよう．

まず，$A$ の起こるのが1回目と2回目であると指定された場合を考えよう．そうすると $n$ 回の試行が

$$A,\ A,\ \underbrace{B,\ B,\ \cdots\cdots\cdots,\ B}_{n-2\text{回}}$$

という結果が得られるのであるから，その確率は

$$p\times p\times\underbrace{q\times q\times\cdots\cdots\times q}_{n-2\text{個}}=p^2q^{n-2}$$

である．

同様に$A$が1回目と3回目に起こり，他は$B$だけが起こると指定された場合の確率も

$$p\times q\times \underbrace{p\times q\times\cdots\cdots\times q}_{n-3\text{個}}=p^2q^{n-2}$$

と計算される．

$A$が起こる2回を指定する指定の仕方は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りだけある．そのそれぞれについて，起こる確率が $p^2q^{n-2}$ であるから，これらを合せて($A$が起こる回目の指定がちがえば排反であることに注意)，

$$P(E_2)={}_n\mathrm{C}_2\,p^2q^{n-2}$$

が得られる．

同じ推論により，次の重複試行の確率が得られる．

**[定理]**　1回の試行で事象$A$の起こる確率が$p$であるとする．このとき，$n$回の重複試行において$A$がちょうど$r$回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^nq^{n-r}\quad(\text{ただし}\ q=1-p)$$

である．ここに$n$は自然数，$r$は $0\leqq r\leqq n$ を満たす整数である．

**例**　サイコロを6回振るとき，偶数の目がちょうど3回だけ出る確率は

$${}_6\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\times\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

である．

再度確認するが，ここで問題としているのは，「6回中3回だけ偶数の目が出る」(残り3回は奇数の目が出る)という確率であり，偶数の目がいつ出るかは問うていない．したがって，「6回のうち，偶数の目が出る3回を選ぶ組合せの数」$={}_6\mathrm{C}_3$ が初めにかかるのである．

## A4.5　期待値（期待金額）

いま，10本のうち2本の当りクジが入っているクジがあり，当りクジを引くと500円，はずれクジを引くと100円の賞金がもらえるとする．

このときの賞金の総額は 500×2＋100×8＝1800円，したがって，1本当りの賞金は $\dfrac{1800}{10}=180$ 円で，これは

$$1本当りの賞金=\frac{500\times2+100\times8}{10}=500\times\frac{2}{10}+100\times\frac{8}{10}$$

＝（当りの賞金）×（当りの確率）

＋（はずれの賞金）×（はずれの確率）

として求めることができる．この180円は，このクジを1本引くという試行を行うとき，平均して1回の試行で期待できる賞金の額に相当しているので，賞金の期待値という．

一般に，ある試行において，変数$X$が $x_1$，$x_2$，……，$x_n$ のいずれかの値となり，$x_1$ となる確率が $p_1$，$x_2$ となる確率が $p_2$，……，$x_n$ となる確率が $p_n$ である場合

$$m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

のことを$X$の **期待値** という．とくに，$X$ が金額のとき期待金額という．

1°　例　1つのサイコロをふるとき出る目の期待値は，出る目は1，2，3，4，5，6のいずれかで，そのうちの1つになる確率はどれも1/6であるから，

$$出る目の期待値=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{7}{2}=3.5$$

2°　賞金の期待値が180円のくじを1本引くには，対価として180円支払うのが公平と考えられる．

そこで，$a$ 円払って“宝くじ”を買うとき，これが“得か損か”を考えるには，宝くじの賞金の期待値 $b$ 円を計算して，$a$，$b$ の大小を比較し，

「$b>a$ なら買うのが得，$b<a$ なら買うのが損」と結論することになる．

——A4　おわり——

## B. 401

大，小2個のサイコロを投げたとき，出た目の和が2となる確率，5となる確率，9となる確率をそれぞれ求めよ．

**アプローチ** 根元事象が何であるか，出た目の和が2となる事象がいかなる根元事象の集まりであるか，を調べます．

| 小＼大 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

**解答** 大，小のサイコロの目の出方はそれぞれ6通りずつあるから，2個のサイコロの目の出方は

$$6\times6=36\text{通り}$$

であり，これらの出方はすべて同様に確からしい．

このうち，目の和が2となるのは，大，小の目がともに1となる1通りである．よって，求める確率は

$$\mathbf{\frac{1}{36}}$$

である．

また，目の和が5となるのは，大，小の目がそれぞれ(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)となる4通りである．よって，求める確率は

$$\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

である．

目の和が9となるのは，大，小の目がそれぞれ(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)となる4通りである．よって，求める確率は

$$\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

である．

［注］ 和が5となる確率と，和が9となる確率が一致したが，これは次のように説明できる．

大，小の目$(i,\ j)$(ただし$1\leqq i\leqq6$, $1\leqq j\leqq6$)に対して，$(7-i,\ 7-j)$という目の組を対応させせることにすれば，特に，和が5となる目の組の集合と，和が9となる目の組の集合との間には1対1対応ができる．よって，それぞれの集合の要素の個数つまり目の出方の個数は等しい．

## B.402

袋の中に赤玉5個，白玉4個が入っている．この袋の中から3個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　取り出された3球がすべて赤玉である．

(2)　取り出された3球には赤玉，白玉のいずれも含まれている．

(3)　取り出された3球がすべて白玉である．

**アプローチ**　球は同色のものでも区別がある，と考えます．

**解答**　9個の球から3個とり出す場合の数は，

${}_9C_3=84$ 通りあり，これらはすべて同様に確からしい．

◀アプローチ

**(1)**　赤玉5個から3個を取り出す場合の数は

${}_5C_3=10$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}$$

である．

**(2)**　赤玉，白玉のいずれも含まれるのは，次の2つの場合に分けられる．

(i)　赤玉2個，白玉1個である場合

(ii)　赤玉1個，白玉2個である場合

(i)の場合は ${}_5C_2\cdot{}_4C_1=40$ 通り，

(ii)の場合は ${}_5C_1\cdot{}_4C_2=30$ 通りある．

よって，求める確率は

$$\frac{40+30}{84}=\frac{5}{6}$$

である．

**(3)**　取り出された3球に赤玉が含まれている確率は，(1)，(2)の結果より

$$\frac{5}{42}+\frac{5}{6}=\frac{20}{21}$$

よって，赤玉が1つも含まれていない，すなわち，すべて白玉である確率は

$$1-\frac{20}{21}=\frac{1}{21}$$

である．

◀(1)と同様に $\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$ と求めることも出来る．

## B.403

正四面体ABCDの1つの頂点にある動点Pは，等確率1/3で他の3つの頂点のいずれかに移動するものとする．

(1) 頂点Aから出発したPが3回目の移動でAに戻る確率を求めよ．

(2) 頂点Aから出発したPが頂点Bをちょうど1回通って4回目の移動でAに戻る確率を求めよ．

**解答** (1) 3回目にAに戻るためには2回目にはA以外の頂点B，C，Dのいずれかにいなければならない．1回目で移った頂点(B，C，Dのいずれか)から，2回目でB，C，Dのいずれかに移る確率は $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ であり，そこから3回目にAに移る確率は $\frac{1}{3}$ である．よって，求める確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{9}}$．

B, C, Dのうち，たとえばBから移れる頂点はCとDの2つ．

(2) 何回目に頂点Bを通るかで分類する．

1回目にBを通る場合：2回目でAに戻るか否かでさらに分類する．2回目にAに戻る場合，3回目にはC，Dのいずれかに移り，そこからもう一度Aに戻るので，確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$ である．Bの次にAに戻らずC，Dのいずれかに移る場合，3回目には，C, Dのうちのもう片方に移り，そこから4回目にAに戻るので確率は $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$ である．以上よりBを通るのが1回目の確率は $\frac{2}{81}+\frac{2}{81}=\frac{4}{81}$ である．

2回目でBを通る場合：1回目と3回目にそれぞれC, Dのいずれかを通って，4回目にAに戻るので確率は $\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$ である．

3回目でBを通る場合：この場合は1回目でBを通る道筋の逆をたどるので，確率は1回目と同じく $\frac{4}{81}$ である．以上より，求める確率は

$\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\mathbf{\frac{4}{27}}$　である．

## B. 404

Ａから F までの英字が 1 つずつ記してある 6 枚のカード をよく混ぜて，左から 1 列に並べるとき，A が B より左に，かつ B が C より左にある確率を求めよ．

**アプローチ** 条件を満たす並べ方の個数を数え上げることによって確率を求める方法が基本的です．しかし別解のアプローチをとると，なぜこの値が答として出てくるか，よりはっきりします．

**解答** 条件をみたすカードの並べ方は，D，E，F の入れる場所を指定すれば決まる．(なぜなら，残りの 3 ヶ所に A，B，C を入れる方法は 1 通りだから．)

◀ 左から A, B, C と入れる．

よってその並べ方の個数は ${}_6P_3$(通り) ある．
条件を考えない一般のカードの並べ方は ${}_6P_6$(通り) あるから，求める確率は

$$\frac{{}_6P_3}{{}_6P_6}=\frac{6\cdot5\cdot4}{6\,!}=\frac{1}{3!}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

である．

**別解** E，F，G の入る所が決まると，残りの 3 ヶ所に A，B，C を入れる方法は 3! 通りあり，そのうち，条件をみたすのは左から ABC となる 1 通りである．よって，求める確率は

$$\frac{1}{3!}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$

[注] 別解について，あくまで確率の定義に基づくならば，E，F，G の入る所の選び方の個数を $N$ とすると，

カードの並べ方の総数　$=3!N$
条件を満たす並べ方の数 $=1\cdot N$

より

$$\frac{1\cdot N}{3!N}=\frac{1}{6}$$

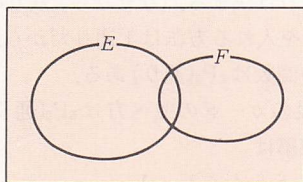
という説明になろう ($N$ を具体的に求める必要がない)．上では，簡潔な表現を良しとしたのである．

## B.405

1回の試行において起こる事象 $E$, $F$ があり，$P(E)=\frac{1}{3}$

$P(F)=\frac{3}{4}$, $P(E\cup F)=\frac{5}{6}$ のとき，次の値を求めよ．

(1) $P(E\cap F)$　(2) $P(\overline{E}\cap\overline{F})$　(3) $P(E\cup\overline{F})$

**アプローチ** 問題に出てくる $E\cup F$, $E\cap F$, $\overline{E}\cap\overline{F}$, $E\cup\overline{F}$ が下の図においてどの部分にあたる事象なのかはっきりさせてから公式(A 4.3 II)を用いれば，混乱しません．

**解答** (1) $P(E\cap F)$

$=P(E)+P(F)-P(E\cup F)$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{1}{4}}$.

ド・モルガンの法則 ▶ (2) $\overline{E}\cap\overline{F}=\overline{E\cup F}$ であるから

$P(\overline{E}\cap\overline{F})=P(\overline{E\cup F})$

余事象の確率 ▶ 一方，　$P(\overline{E\cup F})=1-P(E\cup F)$

だから

$$P(\overline{E}\cap\overline{F})=1-P(E\cup F)=1-\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{1}{6}}.$$

(3) $\overline{F}=(E\cap\overline{F})\cup(\overline{E}\cap\overline{F})$, $E\cap\overline{F}\subseteqq E$

であるから

$E\cup\overline{F}=E\cup(\overline{E}\cap\overline{F})$

である．

$E\cap(\overline{E}\cap\overline{F})\subset E\cap\overline{E}=\phi$

に注意すれば(2)の結果を用いて

$P(E\cup\overline{F})=P(E)+P(\overline{E}\cap\overline{F})$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

となる．

## B.406

５人で１回ジャンケンをするとき，次の確率をそれぞれ求めよ．

(1)　１人だけ勝つ　　(2)　アイコになる．

**アプローチ**　５人のジャンケンの出し方の総数と，条件をみたす出し方の場合の数を数えます．(2)では，余事象を考えたほうが楽です．

**解答**　ジャンケンの出し方はグー・チョキ・パーの３通りあるから，５人では，その出し方の総数は $3^5=243$ 通りとなる．これらの起こり方はすべて同様に確からしい．

(１)　５人のうち誰が勝つかに関して　５通り，
勝つ人のジャンケンの出し方に関して　３通り
あり，このとき負ける４人の出し方は１通りに決まる．よって，１人だけが勝つ場合は $5\times3=15$ 通りとなるので，求める確率は

$$\frac{15}{243}=\frac{5}{81}$$

である．

◀たとえば，勝つ人がグーを出すなら，他の人はチョキを出すことになる．

(２)　余事象「勝つ人がいる」の起こる場合の数を求める．

ジャンケンで勝つ人と負ける人に分かれるのは，グー，チョキ，パーのうちのちょうど２種が現れる場合である．

グーとパーが現れるのは，５人がともにグー，パーのいずれかを出す場合から，５人全員がグーだけ，パーだけの場合を除いた $2^5-2=30$ 通りある．

パーとチョキ，チョキとグーが現れる場合も同じである．よって「勝つ人がいる」場合の数は $3\times30=90$ 通りであり，「アイコとなる」場合の数は $243-90=153$ 通りとなる．ゆえに，求める確率は

$$\frac{153}{243}=\frac{17}{27}$$

である．

## B. 407

1つの袋に赤球・青球・白球がそれぞれ2個ずつ入っている．この袋から，球を1つずつ取り出す．ただし，取り出した球は戻さないものとする．$k=1, 2, \cdots\cdots, 6$ に対して，$k$ 個球を取り出したところで初めてすべての色がそろう確率 $P_k$ を求めよ．

**アプローチ** 初めてすべての色がそろうことがあるのは何回目でしょうか．ここを押さえれば議論がラクでしょう．

**解答** まず，1個，または2個球をとり出したところですべての色がそろうことはないから，$P_1=P_2=\mathbf{0}$ である．また，5個球を取り出したときにはすでにすべての色がそろっているから，6個目で初めてすべての色がそろうということはありえない．すなわち，$P_6=\mathbf{0}$ である．

3個目で初めてすべての色がそろう取り出し方は，1個目は6つの球から選び，2個目は1個目の球と異なる色の残り球4つから選び，3個目は1個目2個目と異なる色の残り球2つから選ぶので，$6\cdot4\cdot2$ 通りある．3個球を取り出す方法は $6\cdot5\cdot4$ 通りあるので，$P_3=\dfrac{6\cdot4\cdot2}{6\cdot5\cdot4}=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$ である．

◀ 球は同色であっても区別して考えている．

4個目で初めてすべての色がそろうとき，同じ色の球を取りだすのは，1個目と2個目，1個目と3個目，2個目と3個目の3つの場合がある．それぞれの場合において，球の取り出し方は，3個目で初めてすべての色がそろう取り出し方と1対1に対応している．よって，4個目で初めてすべての色がそろう取り出し方は $3\cdot(6\cdot4\cdot2)$ 通りある．4個球を取り出す方法は $6\cdot5\cdot4\cdot3$ 通りあるので，

$$P_4=\frac{3\cdot6\cdot4\cdot2}{6\cdot5\cdot4\cdot3}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

◀ 1個目と2個目を同じ色とするなら，2個目に取り出す球は1個目の球によって自動的にきまる．

である．残りの場合は5個目で初めて色がそろう場合であるから，$P_5=1-\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5}=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$ である．

◀ $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$

よって　$P_1=P_2=P_6=\mathbf{0}$，$P_3=P_4=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$，$P_5=\mathbf{\dfrac{1}{5}}$

## B. 408

１個のサイコロを５回投げるとき，１の目が少なくとも１回出る確率を求めよ．

**アプローチ** 余事象の確率を求めます．

**解答** 事象「１の目が少なくとも１回出る」の余事象は「毎回１の目以外が出る」である．サイコロを５回投げるときの目の出方は$6^5$通りあり，そのうち，この余事象が起きるのは，$5^5$通りある．
よって，その確率は

$$\frac{5^5}{6^5}=\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

◀当然，$p.132$の独立試行の乗法定理を用いて右辺を導くことも出来る．

である．したがって，求める確率は

$$\mathbf{1-\left(\frac{5}{6}\right)^5}$$

である．

［注］ 因数分解の公式

$$1-x^5=(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

に従って，上の答を

$$\left(1-\frac{5}{6}\right)\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^1+1\right\}$$

と書きあらわしてみる．この式はどのように解釈できるだろうか．

１の目が少なくとも１回出る５回のサイコロ投げを，１の目が最初に出るのが何回目かで分類する．すると，$1\leqq i\leqq 5$なる$i$に対し，「$i$番目に初めて１が出る」という事象は，「１番目に１以外が出る」「２番目に１以外が出る」 …… 「$(i-1)$番目に１以外が出る」「$i$番目に１が出る」という$i$個の事象の積事象である．ここで，「１回目にサイコロを投げる」「２回目にサイコロを投げる」……「５回目にサイコロを投げる」をそれぞれ試行とみたときこれらが独立であることから，この積事象の確率は

$$\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)\cdots\cdots\left(\frac{5}{6}\right)}_{(i-1)\text{個}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$$

と積の形に表される．(独立試行の乗法定理 $p.132$) これを$i$が１から５まで足し上げたものが上の式である．

## B.409

$m$ 個のサイコロを同時に振る．このようなことを $n$ 回繰り返すとき，次の確率を求めよ．

(1) 毎回，少なくとも1個のサイコロに1の目が出る確率．

(2) 少なくとも1回，すべてのサイコロに1の目が出る確率．

**アプローチ** $m$ 個のサイコロを同時に振ったとき，「少なくとも1個のサイコロに1の目が出る」事象を $E$，「すべてのサイコロに1の目が出る」事象を $F$ とおくと，
(1)では，$n$ 回の試行で $E$ が毎回起こる確率を，(2)では，$n$ 回の試行で $F$ が少なくとも1回起こる確率を求めることになります．

**解答** (1) 1回の試行において事象「少なくとも1個のサイコロに1の目が出る」を $E$ とおくと，余事象 $\overline{E}$ は「全部のサイコロに1以外の目が出る」となる．

$m$ 個のサイコロを投げるとき目の出方は $6^m$ 通り，また $\overline{E}$ の起こり方は $5^m$ 通りであるから，

$$P(E)=1-P(\overline{E})=1-\frac{5^m}{6^m}$$

よって，$n$ 回の試行で，$E$ が毎回起こる確率は

▶ 各回の試行は独立である．

$$\{P(E)\}^n=\left(\mathbf{1-\frac{5^m}{6^m}}\right)^n.$$

(2) 1回の試行において事象「すべてのサイコロに1の目が出る」を $F$ とおくと，

▶ $F$ の起こり方は1通り．

$$P(F)=\frac{1}{6^m} \text{ である．}$$

$n$ 回の試行において

事象 $A$「少なくとも1回 $F$ が起きる」

と定めると，余事象 $\overline{A}$ は「1回も $F$ が起きない」すなわち「毎回 $\overline{F}$ が起こる」となり

$$P(\overline{A})=(P(\overline{F}))^n$$

ここで

$$P(\overline{F})=1-P(F)=1-\frac{1}{6^m},\quad P(A)=1-P(\overline{A})$$

であることから，求める確率は

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(P(\overline{F}))^n=\mathbf{1-\left(1-\frac{1}{6^m}\right)^n}.$$

## B. 410

$n$ 個のサイコロを同時に投げるとき，次の確率を求めよ．

(1) 出る目の最大値が5である．

(2) 出る目の最大値が5，最小値が1である．

**アプローチ** 「出る目の最大値が5である」とは「出る目はすべて5以下で，少なくとも一つの目は5である」ということです．

**解答** $n$ 個のサイコロを同時に投げるとき，目の出方は $6^n$ 通りあり，これらはすべて同様に確からしい．

(1) 事象 $A$「出る目がすべて5以下である」
　事象 $B$「出る目がすべて4以下である」
　事象 $E$「出る目の最大値が5である」

とおくと，$E=A\cap\overline{B}$ である．

$A$ の起こり方は，1個のサイコロの目について5以下の目は1，2，3，4，5の5通りあるから，$5^n$ 通りある．同様に，$B$ の起こり方は $4^n$ 通りある．

$A\supset B$ であるから

$$P(E)=P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(B)$$
$$=\boldsymbol{\frac{5^n}{6^n}-\frac{4^n}{6^n}}.$$

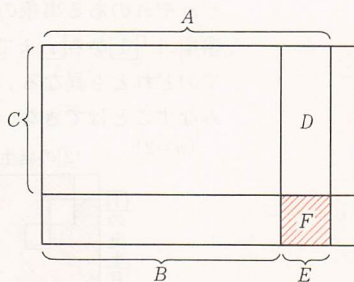
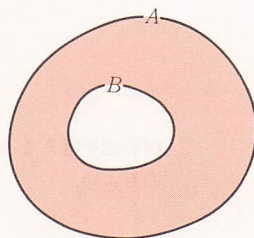
(2) 事象 $C$「出る目がすべて2以上である」
　事象 $D$「出る目がすべて2以上で，それらの最大値が5である」
　事象 $F$「最大値が5，最小値が1である」

とおくと $P(D)=P(A\cap C)-P(B\cap C)$
$P(F)=P(E)-P(D)$

である．ここで

$A\cap C$「出る目は2以上，5以下」は $4^n$ 通り，
$B\cap C$「出る目は2以上，4以下」は $3^n$ 通り，

より，

$$P(F)=P(E)-P(A\cap C)+P(B\cap C)$$
$$=\frac{5^n}{6^n}-\frac{4^n}{6^n}-\frac{4^n}{6^n}+\frac{3^n}{6^n}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5^n-2\cdot 4^n+3^n}{6^n}}.$$

［注］ 右下のような図を描いて，どのような計算をすべきか考える．

## B.411

クラスに $n$ 人の生徒がいる．同じ月に生まれた2人がいる確率が $1/2$ 以上であるのは，$n$ がどのような範囲のときか．（1年のどの月に生まれたかは同様に確からしいとする．）

**アプローチ▶** 余事象に注目すべきです．

**解答** 「同じ月に生まれた2人がいる」の余事象「全員の誕生月が互いに異なる」を調べる．$n \leqq 12$ として生徒に1から $n$ までの番号を順に振る．可能な誕生月の組合せは $12^n$ 通りある．そのうち互いに異なる誕生月の組合せは，$\boxed{1}$ から $\boxed{i}$ までの誕生月の組合せが決まった時 $\boxed{i+1}$ の誕生月の可能性が $12-i$ 通りあることより，

▶ 樹形図を考えるのもよい．

$$12\cdot 11\cdots\cdots\{12-(n-1)\}\text{ 通り}$$

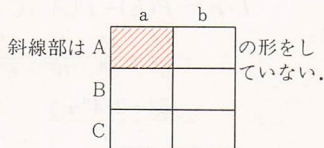
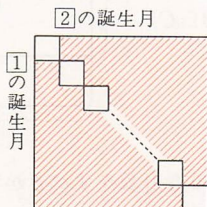
ある．よって，誕生月が互いに異なる確率は

$$\frac{12\cdot 11\cdots\cdots\{12-(n-1)\}}{12\cdot 12\cdots\cdots 12}=\frac{12!}{12^n(12-n)!}\quad\cdots\cdots(★)$$

となる．(★)が $\dfrac{1}{2}$ 未満となる $n$ を求めると

▶ 途中の計算を省いた．(★)が，$n$ が増えるごとに減少する，という事実に注目する．

$$n \geqq 5 \quad \text{となる．}$$

[注]　(★)の式は，（分母分子間の線を区切ると）「$\boxed{1}$ から $\boxed{i}$ までの誕生月が互いに異なっていたとき，$\boxed{i+1}$ の誕生月がそれらのどれとも異なる確率は $\dfrac{12-i}{12}$ である」という事実に基づいた解釈が可能である（条件付確率）．注意しておくと，試行 $T_1$「$\boxed{1}$ から $\boxed{i}$ までの誕生月を調べる」と，試行 $T_2$「$\boxed{i+1}$ の誕生月を調べる」は互いに独立な試行であるが，事象「$\boxed{1}$ から $\boxed{i+1}$ までの誕生月が異なる」が，試行 $T_1$，$T_2$ それぞれのある事象の積事象として表されるわけではない．たとえば事象 $A$「$\boxed{1}$ から $\boxed{i}$ まで互いに異なる」と事象 $B$「$\boxed{i+1}$ は $\boxed{1}$ から $\boxed{i}$ までのどれとも異なる」の積事象であるが，事象 $B$ は，試行 $T_2$ の事象とみなすことはできない．

## B. 412

サイコロを6回振るとき，3の倍数の目がちょうど2回出る確率を求めよ．

**アプローチ**　1回の試行において事象$E$がおこる確率がつねに$p$であるとき，$n$回の試行のうち，事象$E$がちょうど$r$回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\cdot p^r(1-p)^{n-r}$$

となります(重複試行の確率)．この公式を，具体例に沿って導きましょう．

**解答**　3の倍数の目は3，6の2通りだから，
サイコロを1回振るとき3の倍数の目が出る確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3の倍数以外の目が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

である．

サイコロを6回振るとき，たとえば2回目と5回目に3の倍数が出て，それ以外では3の倍数以外の目が出る確率は，独立試行に関する乗法定理より，

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

となる．

一般に，$1\leqq i\neq j\leqq 6$ なる$i$，$j$に対し，3の倍数の目がちょうど$i$回目と$j$回目に出る確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

である．

さて，「3の倍数の目がちょうど2回出る」のは3の倍数が何回目に出るかによって，${}_6\mathrm{C}_2$ 通りある．
これらはすべて排反であるから，求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\mathbf{\frac{80}{243}}$$

となる．

## B. 413

円周を6等分する点を時計まわりの順にA，B，C，D，E，Fとし，点Aを出発点として小石をおく．コインを投げて表が出たときは2，裏が出たときは1だけ小石を時計まわりに分点上を進めるゲームを続け，最初に点Aにちょうど戻ったときを上がりとする．

(1) ちょうど1周して上がる確率を求めよ．

(2) ちょうど2周して上がる確率を求めよ．

**アプローチ** 「ちょうど2周して上がる」ということは1周目はAを通過して「2周目にAに戻る」ということです．

**解答** (1) ちょうど6だけ進むのは，

① 最初の3回で表3回

② 最初の4回で表2回裏2回

③ 最初の5回で表1回裏4回

④ 最初の6回で裏6回

のいずれかを出すときである．

①の確率$=\left(\frac{1}{2}\right)^3$，　②の確率$={}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4$

③の確率$={}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5$，④の確率$=\left(\frac{1}{2}\right)^6$

①，②，③，④の事象は互いに排反である．▶ より求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^6(2^3+6\cdot2^2+5\cdot2+1)=\frac{43}{2^6}=\mathbf{\frac{43}{64}}.$$

(2) 点Aに戻ってもコインを投げつづけるとすると，ちょうど12進むためには，最初の$(k+l)$回で表$k$回裏$l$回出さなければならない．ただし，

$(k,\ l)=(6,\ 0),\ (5,\ 2),\ (4,\ 4)$

$(3,\ 6),\ (2,\ 8),\ (1,\ 10),\ (0,\ 12)$

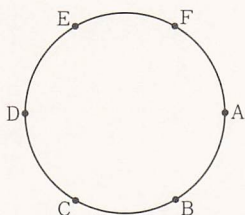
これも排反事象の和の確率 ▶ である．それぞれの場合の確率を計算して足し上げると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^8+{}_9C_3\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{11}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+{}_{12}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}2731$$

このうち途中ちょうど1周して12進む確率は(1)より$\left(\frac{43}{2^6}\right)^2$である．よって，求める確率は

なぜ$\left(\frac{43}{2^6}\right)^2$といえるのでしょうか？ ▶

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12}2731-\left(\frac{43}{2^6}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}882=\mathbf{\frac{441}{2048}}.$$

## B. 414

袋の中に赤玉6個と白玉4個が入っている．この袋から3個を取り出すとき，そのうちの赤玉の個数の期待値，白玉の個数の期待値を求めよ．

**アプローチ** どちらの期待値も定義にしたがって同様に求めることが出来ますが，一方から他方を導くことも出来ます．

**解答** 取り出した3個の玉のうち，赤玉が$k$個($0 \leqq k \leqq 3$)である確率を$P_k$で表す．

10個の玉から3個の玉を取り出す場合の数は

${}_{10}C_3=120$ 通りあるから

$$P_0=\frac{{}_6C_0 \cdot {}_4C_3}{120}=\frac{4}{120},\quad P_1=\frac{{}_6C_1 \cdot {}_4C_2}{120}=\frac{36}{120}$$

$$P_2=\frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{120}=\frac{60}{120},\quad P_3=\frac{{}_6C_3 \cdot {}_4C_0}{120}=\frac{20}{120}$$

となる．よって，赤玉の個数の期待値は

$$\begin{aligned}&0 \cdot P_0+1 \cdot P_1+2 \cdot P_2+3 \cdot P_3\\&=0 \cdot \frac{4}{120}+1 \cdot \frac{36}{120}+2 \cdot \frac{60}{120}+3 \cdot \frac{20}{120}\\&=\frac{9}{5}=\mathbf{1.8}\ \text{(個)}\end{aligned}$$

である．

一方，取り出した3個の玉のうち，白球が$k$個である確率は$P_{3-k}$である．よって，白玉の個数の期待値は

$$\begin{aligned}&0 \cdot P_3+1 \cdot P_2+2 \cdot P_1+3 \cdot P_0\\&=(3-3) \cdot P_3+(3-2) \cdot P_2+(3-1) \cdot P_1+(3-0) \cdot P_0\\&=3(P_3+P_2+P_1+P_0)-(0 \cdot P_0+1 \cdot P_1+2 \cdot P_2+3 \cdot P_3)\\&=3-1.8\\&=\mathbf{1.2}\ \text{(個)}\end{aligned}$$

である．

[注]　(白玉の個数の期待値)$=3-$(赤玉の個数の期待値)

は，当然の結果であるが，その「当然」のゆえんを上の計算で見て取ることができる．

## B. 415

1から9までの数字に対し，その数字を書いたカードが1枚ずつある．この中から7枚のカードを取り出し，そのうちで最も大きい数をXとおく．

(1) X=8 となる確率を求めよ．

(2) Xの期待値を求めよ．

**アプローチ** (2) Xの取りうる値はどのようなものでしょうか．

**解答** (1) X=8 となるのは最大の数が8で，それ以外のカードの数は7以下となる場合である．よって，X=8 となるカードの取り方は，7以下のカードから，どの6枚を選ぶかで決まる．よって，その場合の数は ${}_7C_6=7$ (通り) である．1から9までのカードから7枚を選ぶ方法は ${}_9C_7=36$ (通り) あるので，求める確率は

$$\frac{7}{36}$$

である．

(2) Xの取りうる値は，7，8，9のいずれかである．

X=7 となるカードの取り方は1から7までのすべてのカードを取る1通りだけである．

X=8 の場合は，上で述べたように7通りある．

X=9 となるカードの取り方は，8以下のカードからどの6枚を選ぶかで決まるから ${}_8C_6=28$ (通り) ある．したがって，求める期待値は

$$\frac{1}{36}\cdot7+\frac{7}{36}\cdot8+\frac{28}{36}\cdot9=\frac{35}{4}$$

である．

## B. 416

1つのサイコロを何回か振って，それまで出た目の和が3以上になったところでやめることにする．振る回数をXとする．

(1)　X=1 となる確率を求めよ．

(2)　X≦2 となる確率を求めよ．

(3)　Xの期待値を求めよ．

**アプローチ**　サイコロは多くとも何回振ることになるでしょう？

**解答**　**(1)**　求める確率は，サイコロを1回振って出る目が3以上となる確率である．よって

$$\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

である．

**(2)**　振る回数はたかだか3回であるが，ちょうど3回振ることになるのは，1回目，2回目ともに1が出る場合であり，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$ である．

◀余事象に目をつける方法．

したがって，X≦2 となる確率は

$$1-\frac{1}{36}=\mathbf{\frac{35}{36}}$$

である．

**(3)**　$X=k\,(k=1,\ 2,\ 3)$ となる確率を $P(k)$ で表すことにする．(1)，(2)の結果より，

$$P(1)=\frac{2}{3}$$

$$P(2)=\frac{35}{36}-\frac{2}{3}=\frac{11}{36}$$

$$P(3)=\frac{1}{36}$$

である．よって，求める期待値は，

$$1\cdot P(1)+2\cdot P(2)+3\cdot P(3)$$

$$=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{11}{36}+3\cdot\frac{1}{36}$$

$$=\mathbf{\frac{49}{36}}$$

である．

## B. 417

(1)　サイコロを1回または2回振り，最後に出た目の数を得点とするゲームを考える．1回振って出た目を見た上で，2回目を振るか否かを決めるのであるが，どのように決めるのが有利であるか．

(2)　上と同様のゲームで3回振ることも許されるとしたら，2回目，3回目を振るか否かの決定は，どのようにするのが有利か．

**アプローチ**　(1)では，サイコロを1回振るとき出る目の期待値を基準にして，2回目を振るかどうか決めます．

(2)では，1回振った後で，(1)のゲームの得点の期待値を基準にして決めます．

**解答**　(1)　サイコロを1回振るとき出る目の期待値は $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5$ である．

したがって，1回目のサイコロの目が1，2，3のときには2回目を振った方が高い得点が期待できる一方，1回目のサイコロの目が4，5，6のときには，2回目を振らない方が得である．

（答）**1回目が1，2，3のときには2回目を振り，4，5，6のときには振らない．**

(2)　まず(1)のゲームで最善の決め方をしたときの期待値$m$を計算する．

1回目に1，2，3の目が出たとき，2回目を振ることになるが，そのときの期待値は3.5である．

1回目に4，5，6の目が出たとき，出た目がそのまま得点となる．

よって，$m=3.5\times\frac{3}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=4.25$

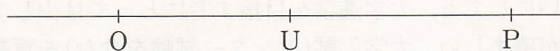
サイコロを1回振ったあと，さらにゲームを続行することにすると，(1)のゲームに帰着する．そのとき最善の決め方をすると得点の期待値は4.25である．以上より

（答）**1回目が1，2，3，4のときには2回目を振り，5，6のときは振らない．2回目を振ったとき，その目が1，2，3のときは3回目を振り，4，5，6のときは振らない．**

# §5 数 と 式

本章で扱う「数と式」は，本来は選択科目である「数学Ａ」の単元である．しかし，〈数と式〉で扱われる内容は，高校数学全体の根幹を成すものであり，義務教育化した高校数学の中で必修ではないにしても，大学進学を目指す者にとっては少しでも早い学習が望ましい．大学入試(センター試験を含む)を意識すればなおさらである．そこで本書では，「数学Ａ」の〈数と式〉の必須部分を「数学Ｂ」の〈複素数〉の一部分もあわせて，その要点をここで扱うことにした．もちろん，これらについての“より深い叙述”と“より実のある演習”は，「数学Ａ」，「数学Ｂ」でなされる．読者は，さしあたっては，演習を気にせず，本章のＡ基礎理論篇をしっかり読めば十分である．

## A5.1 実　数

直線上に，1点Oと，O以外の点Uをとると，直線上のいかなる点Pに対しても，点Pが，点Oに関してどちら側にあるか（Uと同じ側か，反対側か）線分OPが線分OUの何倍の長さをもつかという2つに注目することにより，点Pに，正・負の符号のついた数を対応させることができる．

このように数と対応させて考えるとき，この直線を **数直線** と呼ぶ．また数直線上の点に対応する数を，**実数** と呼ぶ．

実数には，2つの整数 $p$，$q$（ただし $q \neq 0$）の $\dfrac{p}{q}$ で表される **有理数** と，そうではない **無理数** とがある．

いままで学んできた数を一覧表にまとめて分類すると下のようになる．

## A5.2 実数とその小数表示

2.5や0.123のように小数で表したとき有限の桁で終わる数，すなわち，**有限小数** は有理数である．これらの数は，たとえば，

$$2.5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2},\qquad 0.123=\frac{123}{1000}$$

のように，必ず整数の比で表されるからである．

小数点以下に(0とは異なる)数字が限りなく現れる数を **無限小数** という．

無限小数のうちで，0.3333……… や 12.3454545……… のように，ある桁から先は有限個の同じ数字のならびがくり返して現れる数を **循環小数** という．

循環小数は有理数である．逆に有理数は有限小数あるいは循環小数で表される．

したがって，無理数を小数表示すれば循環しない無限小数となる．

以上の関係を表にまとめると次のようになる．

## A5.3　実数の四則

任意の実数 $a$，$b$ の和 $a+b$ をつくる演算を **加法** という．同様に，差 $a-b$ をつくる演算を **減法**，積 $ab$ をつくる演算を **乗法** という．

商 $a \div b$ をつくる演算を **除法** という．このときは $b \neq 0$ とする．

加減乗除の演算をまとめて四則演算，あるいは簡単に四則という．

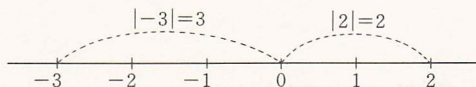
有理数どうしの四則演算を実際に行うことは小学校以来よく親しんできたはずである．無理数を含む実数どうしの四則演算についても，以下の基本的な計算法則が成り立つことだけを記しておこう．

| | 加法 | 乗法 |
|---|---|---|
| ［交換法則］ | $a+b=b+a$, | $ab=ba$ |
| ［結合法則］ | $(a+b)+c=a+(b+c)$, | $(ab)c=a(bc)$ |
| ［分配法則］ | $a(b+c)=ab+ac$ | |

1° 有理数どうしに四則演算をほどこした結果も有理数である．同様に，実数どうしに四則演算をほどこした結果も実数である．

## A5.4 実数の絶対値

数直線上で，実数 $a$ に対応する点Aと原点との距離を，実数 $a$ の **絶対値** と呼び，$|a|$ で表す．

たとえば，$|-3|=3$,　$|0|=0$,　$|2|=2$.

これをいいかえると

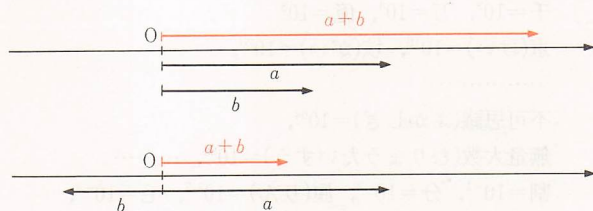
$$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．すなわち，絶対値記号をはずすには中味の符号によって分類すればよい．

1° 実数 $a$，$b$ が同符号ならば，点 $a+b$ の原点からの距離 $|a+b|$ は $|a|+|b|$ である．しかし，$a$，$b$ が異符号ならば点 $a+b$ の原点からの距離 $|a+b|$ は $|a|+|b|$ より小さい．

したがって，任意の実数 $a$，$b$ に対して

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

が成り立つ．

## A5.5 指　数

たとえば

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$$

のように，$n$ が自然数のとき，

$n$ 個の $a$ を掛け合せたもの

を $a^n$ と表し，この記号を「$a$ の $n$ 乗」と読む．$n$ を **指数** という．より丁寧に，$a^n$ のことを，指数が $n$ の $a$ の **累乗**（るいじょう）（あるいは，$a$ の べき ）ということもある．

この定義から明らかなように，累乗の計算では次の **指数法則** が成り立つ．

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \qquad (\text{ただし}\ m > n)$$

指数が 0 や負の整数の場合の累乗は次のように定義される（以下，$a \neq 0$ とする）．

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (n\ \text{は自然数})$$

この定義のもとでは，任意の整数 $m$，$n$ に対して

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ．

1°　正負の指数の累乗を用いると極めて大きな数，極めて小さな数をわかりやすく表すことができる．

例1　千$=10^3$，万$=10^4$，億$=10^8$
京(けい)$=10^{16}$，垓(がい)$=10^{20}$，
……………
不可思議(ふかしぎ)$=10^{64}$，
無量大数(むりょうたいすう)$=10^{68}$，………
割$=10^{-1}$，分$=10^{-2}$，厘(りん)$=10^{-3}$，毛$=10^{-4}$，
糸(し)$=10^{-5}$，……………
空虚(くうきょ)$=10^{-21}$，清浄(せいじょう)$=10^{-22}$，……

例2　光の速度は　　約 $3\times10^{10}$ cm/秒
電子の質量は　　約 $9.91\times10^{-31}$ kg

## A5.6 平方根

平方して $a$ になる数，すなわち，$x^2=a$ を満たす数を $a$ の **平方根** という．

中学校で学んだ関数 $y=x^2$ のグラフの右半分を考えればわかるように，$x$ を 0 から大きくしていくにつれて，$x^2$ は 0 からいくらでも大きくなる．

したがって，正の数 $a$ が与えられたとき，

$$x^2=a$$

となる正数 $x$ がただ1つある．これを $\sqrt{a}$ で表す．

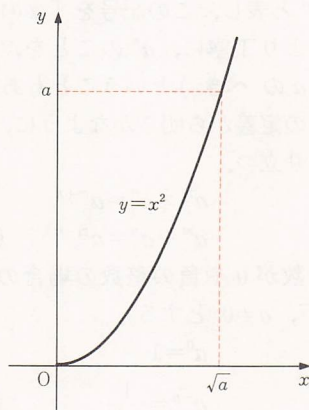
正の数 $a$ の平方根は $\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ の2つである．0の平方根は0だけである．

また $\sqrt{0}=0$ とする．

1°　負の数 $a$ の平方根は実数の範囲には存在しない．

2°　任意の実数 $a$ に対して

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

が成り立つことは，応用上，大切である．

## A5.7 平方根を含む計算

$a>0$, $b>0$ とするとき，次の公式が成り立つ．

**1° 積，商と平方根**

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

例　$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{35}\div\sqrt{5}=\sqrt{7}$

**2° 分母の有理化の基本原理**

i）$\dfrac{A}{\sqrt{b}}=\dfrac{A\sqrt{b}}{b}$

ii）$\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

$\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

ここで，乗法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ を用いている．

☞ A5.12

## A5.8 複素数

### I．虚数単位

平方して $-1$ となる数を新たに考えて $i$ で表す．すなわち

$$i^2=-1$$

$i$ を **虚数単位** とよぶ．

### II．複素数の定義

2つの実数 $a$, $b$ を用いて $a+bi$ の形で表される数を **複素数** という．

複素数 $a+bi$ において，$a=0$ のときは単に $bi$ と書く．

また，$a+bi$ で $b=0$ のときは，単に $a$ と書き，実数 $a$ と同じとみなす．

### III．複素数の相等

2つの複素数 $a+bi$，$c+di$ の相等については次のように定める（ただし，$a$，$b$，$c$，$d$ は実数）．

$$a+bi=c+di \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

とくに　$$a+bi=0 \iff a=b=0$$

### IV．複素数の四則

複素数の計算では，

$i$ を単なる文字として普通に計算し，$i^2$ が現れたときだけそれを $-1$ でおきかえる．

という原則に従えばよい．

[加法]　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

[減法]　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

[乗法]　$$(a+bi)(c+di)=ac+(bc+ad)i+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

[除法]　$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+(ad-bc)i-bdi^2}{a^2-b^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}$$

1°　もちろん，除法を考えるときは，$a+bi \neq 0$ とする．

2°　このように2つの複素数に四則演算をほどこした結果は，また複素数である．

## A5.9 集合の基礎

### I. 集合と要素

12の正の約数の全体，正の偶数の全体，$x^2<9$ を満たす実数 $x$ の全体のように，ある条件にあてはまるものすべての集まりを **集合** という．

また集合を構成している個々のものをその集合の **要素** という．

例1　$A$ を12の正の約数の全体の集合とするとき，$A$ の要素は，1，2，3，4，6，12の6個である．

例2　$B$ を $x^2<9$ を満たす整数 $x$ の全体の集合とするとき，$B$ の要素は $-2$，$-1$，0，1，2 の5個の整数である．

### II. 集合の表し方

集合を表すには，{ }の中に要素のすべてを書きならべればよい．

例3　12の正の約数の全体の集合は

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ と表せる．

例4　正の偶数の全体のように要素が無数にあって書ききれないときは，

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots\}$$

のように書く．しかし，……という部分に，あいまいさが残る．

集合を表すのに，集合を定める条件，すなわち，要素が満たすべき条件を示すという方法もある．たとえば，$x^2<9$ を満たす実数 $x$ の全体の集合を表すのに

$$\{x\,|\,x^2<9,\ x \text{ は実数}\}$$

のように書く．

注意　高校数学では，数として実数を考えていることが一般的であるので，“$x$ は実数”という部分を省略して，単に

$$\{x\,|\,x^2<9\}$$

のように書くことが多い．

集合を定める条件の表し方は1通りではない．たとえば，集合 $\{x|x^2<9\}$ と集合 $\{x||x|<3\}$ は，ともに集合 $\{x|-3<x<3\}$ と同じものである．

1°　2つの集合 $A$，$B$ が等しい $(A=B)$ とは，両者の要素が全体として一致していることである．たとえば

$$\{x|x^2<9\}=\{x||x|<3\}$$

2°　$a$ が集合 $A$ の要素であることを

$$a\in A$$

で表す．逆に，$a$ が $A$ の要素でないことを

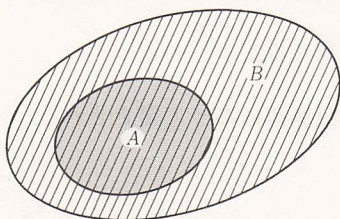
$$a\notin A$$

で表す．

3°　要素が1つもない集合を考えることがある．これを **空集合** といい，$\phi$ で表す．

注　$\phi$ は，ギリシャ文字で，通常［ファイ］または［フィー］と読む．

例　$A=\{15$ の偶数の約数$\}$ とおけば $A=\phi$

## III．包含(ほうがん)関係と部分集合

2つの集合 $A$ と $B$ があって，$A$ が全体として $B$ に含まれているとき，$A$ は $B$ の **部分集合** であるといい

$$A\subseteqq B$$

で表す．

すなわち，$A\subseteqq B$ であるとは，$A$ のどの要素も $B$ に含まれていることである．

$A\subseteqq B$ であり，さらに，$A\neq B$ ならば，$A$ は $B$ の **真部分集合** であるといい，

$$A\subset B$$

で表す．

1°　真部分集合の関係を $A\subsetneqq B$ と書く流儀もあるが，高校では一般的でない．

2°　$A\subseteqq B$ であるとは，$A\subset B$ または $A=B$ となることである．したがって，実際は $A\subset B$ であるときに $A\subseteqq B$ と書いても誤りではない．

## A 5.10　集合の演算

### I．交わりと結び

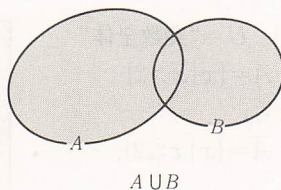
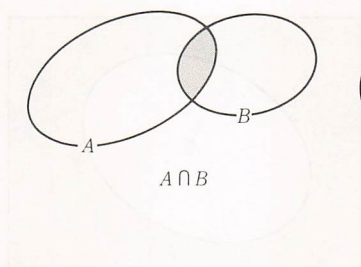
2つの集合 $A$，$B$ について $A$，$B$ のどちらにも属している要素全体の集合を，$A$ と $B$ の **交わり**（または **共通部分**，または，**積集合**）といい

$$A \cap B$$

で表す．

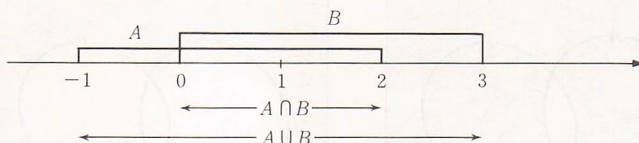
また，$A$，$B$ の少なくとも一方に属している要素全体の集合を $A$ と $B$ の **結び**（または **合併**，または **和集合**）といい

$$A \cup B$$

で表す．

例　$A=\{x \mid -1<x<2\}$，$B=\{x \mid 0<x<3\}$

ならば

$A \cap B=\{x \mid 0<x<2\}$

$A \cup B=\{x \mid -1<x<3\}$．

**II．補集合**

あらかじめある集合$U$を定め，$U$のいろいろな部分集合について考えることがある．

たとえば，

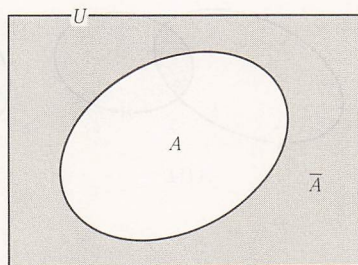
$U$＝“実数全体”，　$A$＝“正の実数全体”
　　　　　　　　　$B$＝“整数全体”
　　　　　　　　　$C$＝“$x^2<1$ となる実数全体”，
　　　　　　　　　　⋮

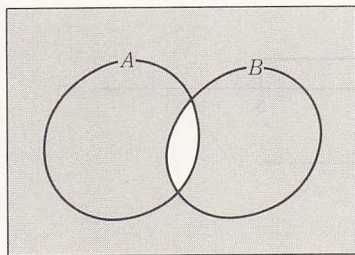
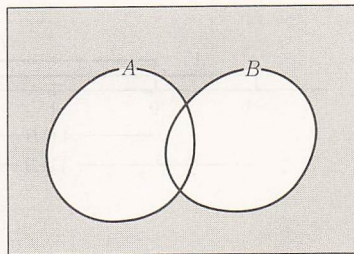
このようなとき，$U$を **全体集合** という．

そして，$U$の部分集合$A$に対して，$A$に属さない$U$の要素の全体を$A$の **補集合** といい

$$\overline{A}$$

で表す．

例　$U$＝“実数全体”
　$A=\{x \mid x>2\}$
なら，
　$\overline{A}=\{x \mid x \leqq 2\}$．

**III．ド・モルガンの法則**

$$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$$

$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$

## A 5.11　整式の基礎

文字$x$についての(あるいは，$x$を変数とする) **単項式** とは

係数$\times x^k$　($k$は0または自然数)

で表される式である．

このような$x$のいくつかの単項式を加え合せたものを，$x$の **整式** という．したがって，$x$の整式は整理することによって

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

の形に表される．整式のことを **多項式** ともいう．

$x$の整式を表すのに$P(x)$，$f(x)$などの記号を用いることがある．

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

において $a_0\neq0$ ならば，$P(x)$は$n$次の整式($n$次式)であるという．

例　$ax^2+bx+c$ は $a\neq0$ ならば$x$の2次式である．

$a=0$ の可能性もあるときには，$ax^2+bx+c$ は「高々2次の整式」であるという．2次以下の整式であるといってもよい．

1°　係数がすべて0である整式も考えるときがある．これを，式として0の整式という．恒等的に0の整式ということもある．

2°　整式$P(x)$の$x$にある値$a$を代入して得られる数を$P(a)$で表す．関数記号の用法と同じである．

例　$P(x)=x^2+x-2$ のとき，$P(1)=0$，$P(2)=4$

3°　2つ以上の文字についての整式も考えられる．

たとえば

$$x^5+y^4-3x^2y^3 \quad \cdots\cdots ①$$

は$x$，$y$の整式である．$x$，$y$の整式の次数は，$x$，$y$を通して数えた次数によって定まる．たとえば①の第1項は5次，第2項は4次，第3項は $2+3=5$ 次である．したがって①は$x$，$y$の整式として5次である．

4°　整式の加法，減法は **同類項**，すなわち，注目する文字の部分がまったく同一の項の係数を加，減することによって行われる．

# A 5.12 展開および因数分解

2つの整式が与えられたとき，その積は，次のように，分配法則と整式の加法の原理にしたがって計算され，結果は1つの整式になる．

$$\begin{aligned}(x+3)(x^2+2x-1)&=(x^3+2x^2-x)+(3x^2+6x-3)\\&=x^3+5x^2+5x-3\end{aligned}$$

文字が2つ以上になっても同様である．たとえば，

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

このように，いくつかの整式の積を1つの整式として表す変形を **展開** という．

逆に，1つの整式を，いくつかの整式の積として表すことを **因数分解** という．

機械的にできる展開と異なり，因数分解では，いろいろな工夫が必要である．

以下の公式は，この「工夫」を引き出すための最も基本的な道具である．

[公式]

(1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(4) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

(5) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(6) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(7) $a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=(a+b+c)^2$

(8) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(9) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(10) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(11) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

因数分解の基本公式

このうち，(1)，(2)，(3)，(8)は，中学で学んでいる．

# A 5.13　分数式とその計算

読者が小学校や中学校で経験したように，整数だけでなく $\frac{3}{5}$，$-\frac{15}{7}$ などの分数とそれらの計算(すなわち，約分，通分，四則演算)を学ぶことによって，「応用問題」や「方程式」を解くことができるようになった．同様に，整式だけでなく，整式を分子・分母にもった‘分数式’とその計算を学ぶことによって，多くの問題に見通しが開かれるのである．

## I．分数式の定義と相等

$A$，$B$ を整式とするとき，$\frac{A}{B}$ の形の式を **分数式** という．ここで，分母に来る $B$ は，式として 0 である整式ではない．

1°　例　$\frac{2x}{x^2-1}$ は $x$ の分数式である．

## II．約分と通分の原理

$C$ が恒等的に 0 でない整式のとき，

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ．左辺を右辺になおす変形が **約分** である．**通分** では右辺を左辺になおす変形が使われる．

1°　例　$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}$

すなわち，分数式としての等式

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

例　$M=\frac{1}{x+1}$，$N=\frac{1}{x-1}$ の場合

$$M=\frac{x-1}{(x+1)(x-1)},\quad N=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

と通分できるので

$$M+N=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

2°　例　$M=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$，$N=\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ の場合，$M$，$N$ の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-2)(x-3)$ が共通の分母になるようにして

$$M=\frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)},\quad N=\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

と通分できる．

よって，たとえば

$$M-N=\frac{-8}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

## A5.14 恒等式と方程式

たとえば，$x$ をふくむ等式

$$x^2-4=0 \qquad \cdots\cdots①$$

は，$x=2$，$-2$ の 2 つの値に対してしか成り立たない．

それに対して，等式

$$(x-2)(x+2)=x^2-4 \qquad \cdots\cdots②$$

は，$x$ がどのような値をとっても成り立つ．

②のように，ふくまれる文字（変数）がどのような値をとっても成り立つ等式を **恒等式** という．

一方，①のように等式において，この等式を成立させる $x$ の値を定めようと考えるとき，$x$ についての **方程式** という．

1°　$(x+2)^2=x^2+4x+4$

は，$x$ についての恒等式である．

2°　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

は，$x$，$y$ がどのような値をとっても成り立つ．したがって，$x$，$y$ についての恒等式である．

——A5　おわり——

# §6 発展問題

本セクションでは，内容が数学Ⅰのいくつかの単元にまたがる問題，あるいは，各単元の深い理解と粘り強い思考が要求される問題を扱う．独力で解決できなくとも，解答を熟読してしっかり理解できれば，著者達の意図は達成される．難解であれば，初読の際は読みとばす手もあろう．

## B. 601

$x$, $y$ が

$$0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ x+y \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たして動くとし，$x$ と $y$ の関数

$$z=f(x,\ y)=9x^2+6xy+2y^2-6x-3y$$

を考える．

(1)　$a$ を $0 \leqq a \leqq 1$ なる数として，$y$ の値を $a$ に固定したとき，$x$ の動きうる範囲を求めよ．

(2)　$y$ の値を $a$ に固定し，$x$ が(1)で求めた範囲を動くとき，$z$ の最小値 $g(a)$ を求めよ．

(3)　$x$, $y$ が①を満たして動くとき，$z$ の最小値を求めよ．

**アプローチ**　問題の意味は B. 106 と同じです．B. 106 の 注意 を思い出して下さい．

**解答**　(1)　①の第1，第3式に $y=a$ を代入して

$$0 \leqq x,\ x+a \leqq 1$$

$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1-a} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

これが $x$ の動きうる範囲である．

$y=a$ とした．▶ (2)　$f(x,\ a)=9x^2+6ax-6x+2a^2-3a$

$$=9x^2-6(1-a)x+2a^2-3a$$

$$=9\left\{x^2-\frac{2}{3}(1-a)x\right\}+2a^2-3a$$

$$=9\left\{x-\frac{1}{3}(1-a)\right\}^2-9\left\{\frac{1}{3}(1-a)\right\}^2+2a^2-3a$$

$$=9\left\{x-\frac{1}{3}(1-a)\right\}^2-(1-a)^2+2a^2-3a$$

$$=9\left\{x-\frac{1}{3}(1-a)\right\}^2+a^2-a-1$$

$0 \leqq a \leqq 1$ であるから $0 \leqq \frac{1}{3}(1-a) \leqq 1-a$ である．▶ ここで $x=\frac{1}{3}(1-a)$ は(1)で求めた範囲に属するから，$f(x,\ a)$ は $x=\frac{1}{3}(1-a)$ のとき最小値をとり，

$$g(a)=\boldsymbol{a^2-a-1}$$

**(3)**　①の第2式から，$y$ の値 $a$ は

$$0 \leqq a \quad \cdots\cdots ③$$

を満たさなければならない．また②を満たす $x$ が存在するためには

$$0 \leqq 1-a \qquad \therefore \quad a \leqq 1 \quad \cdots\cdots ④$$

でなければならない．③，④より $a$ は

$$0 \leqq a \leqq 1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

の範囲を動く．

そこで条件⑤の下で $g(a)$ の最小値を求める．

$$g(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

であり，$a=\frac{1}{2}$ は⑤の範囲に属するから，$g(a)$ は

$a=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$ をとる．

以上により，$x$，$y$ が①を満たして動くときの $z$ の最小値は $\boldsymbol{-\frac{5}{4}}$ である．

注意　条件①を満たすような $x$，$y$ を座標にもつ点 $(x,\ y)$ の全体は図2のような三角形の周および内部である．

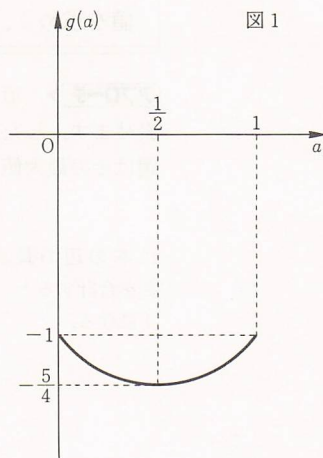
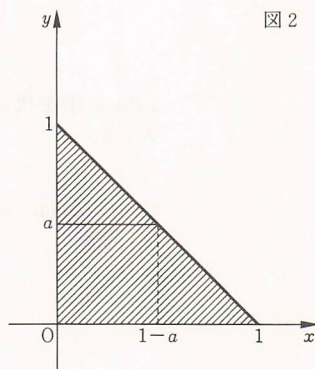
よって $y$ の値は $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲に限る．これが⑤の意味である．また $y$ の値を $a$ に固定したとき，$x$ が②の範囲を動くことも見て取ることができる．

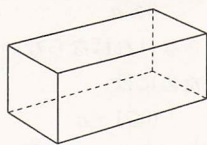
**(3)**の別解　$f(x,\ y)$ を $x$ の2次式と見なして平方完成し，その定数項を $y$ について平方完成すると

$$\begin{aligned} z&=9\left\{x-\frac{1}{3}(1-y)\right\}^2+y^2-y-1 \\ &=9\left\{x-\frac{1}{3}(1-y)\right\}^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる．よって $z \geqq -\frac{5}{4}$ が成立し，しかも

$$x-\frac{1}{3}(1-y)=y-\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{2}$$

のとき $z=-\frac{5}{4}$ となる．この $x$，$y$ の値は条件①を満たすので，$z$ の最小値は $\boldsymbol{-\frac{5}{4}}$ である．

## B. 602

長さ4の細い棒を切って組み立て紙を張って直方体を作った．必要な紙の面積の最大値を求めよ．

**アプローチ** 直方体の3辺の長さを $x$，$y$，$z$ とすると，$z$ は $x$，$y$ で表せます．したがって直方体の表面積は $x$ と $y$ の関数になります．問題はその最大値ですが，これはB. 601の応用です．

**解答** 直方体の3辺の長さを $x$，$y$，$z$ とすると，

（12本の辺の長さを合計すると4になる．）

$$4(x+y+z)=4$$

$$\therefore\quad x+y+z=1$$

$$\therefore\quad z=1-x-y \quad \cdots\cdots ①$$

よって，表面積は

$$S=2xy+2yz+2zx$$

$$=2xy+2(x+y)z$$

（①を代入した．）

$$=2xy+2(x+y)(1-x-y)$$

$$=-2(x+y)^2+2xy+2(x+y)$$

$$=-2x^2-2xy-2y^2+2x+2y \quad \cdots\cdots ②$$

で与えられる．

また $x$，$y$ の動く範囲は，　$x,\ y,\ z\geqq 0$

すなわち

（$z\geqq 0$ に①を代入する．）

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 1 \quad \cdots\cdots ③$$

である．そこで $x$，$y$ が③を満たして動くとき，$S$ の最大値を求める．

（☞B. 601(3) 別解）

②を $x$ に関して平方完成すると

$$S=-2x^2-2(y-1)x-2y^2+2y$$

$$=-2\{x^2-(1-y)x\}-2y^2+2y$$

$$=-2\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2+2\left(\frac{1-y}{2}\right)^2-2y^2+2y$$

さらに，$x$ の2次式とみたときの定数項を $y$ について平方完成して

$$=-2\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2-\frac{3}{2}y^2+y+\frac{1}{2}$$

$$=-2\left(x-\frac{1-y}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

となる．よってつねに $S \leqq \dfrac{2}{3}$ を満たし，しかも

$$x-\frac{1-y}{2}=y-\frac{1}{3}=0$$

$$\therefore\quad x=y=\frac{1}{3}$$

のとき $S=\dfrac{2}{3}$ となる．この $x$，$y$ の値は③を満たすので求める $S$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ である．

別解　$x$，$y$ が③を満たして動くとき，②で与えられる $S$ の最大値を求める．

$y$ の値を $a$ に固定する．ただし

$$0 \leqq a \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ④$$

◀☞B. 601⑤

とする．このとき $x$ は

$$0 \leqq x \leqq 1-a \qquad \cdots\cdots ⑤$$

◀☞B. 601②

の範囲を動く．そして

$$\begin{aligned} S&=-2x^2-2ax-2a^2+2x+2a \\ &=-2\left(x-\frac{1-a}{2}\right)^2-\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

◀前ページの計算と同じ．

であり，$x=\dfrac{1-a}{2}$ は⑤の範囲に属するから，$S$ は最大値

$$g(a)=-\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

をとる．

次に $a$ が④の範囲を動くとして $g(a)$ の最大値を求める．

$$g(a)=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

であるから，$a=\dfrac{1}{3}$ のとき $g(a)$ は最大値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．

以上により，$S$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$ である．

注意　直方体の表面積は，立方体のとき最大になった．これは，「周の長さが一定である長方形の面積は正方形のときに最大になる」という有名な事実(証明してみよう)を，〈高次元化〉したものである．

## B. 603

2つの正の数 $\alpha$, $\beta$ に対し，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ を相加平均，$\sqrt{\alpha\beta}$ を相乗平均という．

(1)　相加平均が $M$，相乗平均が $m$ である2つの正の数を2根にもつ2次方程式を作れ．

(2)　相加平均は，一般に相乗平均より小さくないことを示せ．

**アプローチ**　2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2根を $\alpha$, $\beta$ とすると，

$$a=-\alpha-\beta,\quad b=\alpha\beta$$

が成立します (☞ B. 110 (2))．上の(1)はこの関係式の簡単な応用です．(2)では，2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2根 $\alpha$, $\beta$ が実数であることに注意しましょう．「相加平均≧相乗平均」という不等式が成立することは別の（もっと直接的な）方法でも示せますが，ここでは2次方程式の理論を応用して証明して下さい．

**解答**　**(1)**　2次方程式

$$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

の2根を $\alpha$, $\beta$ とすると，

$$a=-\alpha-\beta,\quad b=\alpha\beta$$

が成立する．しかるに

$$M=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad m=\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\therefore\ \begin{cases} a=-(\alpha+\beta)=-2M \\ b=\alpha\beta=m^2 \end{cases}$$

であるから，①は

$$\boldsymbol{x^2-2Mx+m^2=0} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる．

**(2)**　2次方程式②は実根をもつから，

☞ B. 108 (2)

$$判別式=(2M)^2-4m^2\geqq 0$$

$$\therefore\ M^2-m^2\geqq 0$$

$$\therefore\ (M-m)(M+m)\geqq 0$$

ここで $\alpha$, $\beta>0$ であるから，$M$, $m>0$．よって上式より

$$M-m\geqq 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{M\geqq m}$$

を得る．

## B.604

(1)　実数 $\alpha$, $\beta$ に対し，$\alpha$, $\beta>0$ であるとは

$$\alpha+\beta>0 \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta>0$$

が成立することと同等である．このことを証明せよ．

(2)　2次方程式 $x^2+(t+1)x+t+3=0$ の2つの根を $\alpha$, $\beta$ とするとき，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ を $t$ で表せ．

(3)　(2)において，$\alpha$, $\beta>0$ となるような $t$ の範囲を求めよ．

**アプローチ**　(2)　B.110(2)を思い出します．

(3)　2次方程式 $x^2+(t+1)x+3+t=0$ の解は，B.108(3)により，

$$x=\frac{-(t+1)\pm\sqrt{(t+1)^2-4(t+3)}}{2}$$

$$=\frac{-t-1\pm\sqrt{t^2-2t-11}}{2}$$

で与えられます．したがって条件 $\alpha$, $\beta>0$ は

$$\frac{-t-1\pm\sqrt{t^2-2t-11}}{2}>0$$

とも書けますが，これを満たす $t$ の範囲を求めることは容易ではありません．そこで(1)，(2)を組合せて考えます．また放物線 $y=x^2+(t+1)x+t+3$ が $x$ 軸の $x>0$ の範囲で2交点または接点をもつ条件を考えるのも一つの方法です．

**解答**　(1)　$\alpha$, $\beta>0$ ならば $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$ が成立することは明らか．また逆に $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$ が成立するとする．特に $\alpha\beta>0$ だから

$$\alpha,\ \beta>0 \quad \text{または} \quad \alpha,\ \beta<0$$

が成立する．さらに $\alpha+\beta>0$ だから $\alpha$, $\beta>0$ でなければならない．■

◀ $A$ と $B$ が同等とは，$\begin{cases} A \text{ ならば } B \\ B \text{ ならば } A \end{cases}$ が成立するということである．

(2)　$\begin{cases} t+1=-\alpha-\beta \\ t+3=\alpha\beta \end{cases}$　$\therefore$　$\begin{cases} \alpha+\beta=-(t+1) & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=t+3 & \cdots\cdots② \end{cases}$

◀ ☞B.110(2)

(3)　$\alpha$, $\beta>0$ であるとは，まず2次方程式が実根をもち，$\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$ を満たすということである．実根をもつ条件は，判別式を用いて

◀ ☞B.108(2)

$$D=(t+1)^2-4(t+3)\geqq 0$$

$\therefore$　$t^2-2t-11\geqq 0$

$\therefore$　$t\leqq 1-2\sqrt{3}$　または　$t\geqq 1+2\sqrt{3}$　$\cdots\cdots③$

◀ $t^2-2t-11=0$ の2根は $t=1\pm2\sqrt{3}$

またこのとき $\alpha$, $\beta>0$ となるための条件は，①，②より

$$\begin{cases} -(t+1)>0 \\ t+3>0 \end{cases} \qquad \therefore\quad -3<t<-1 \quad \cdots\cdots ④$$

よって，求める $t$ の範囲は③，④より

$1-2\sqrt{3}=-2.464\cdots$
$1+2\sqrt{3}=4.464\cdots$

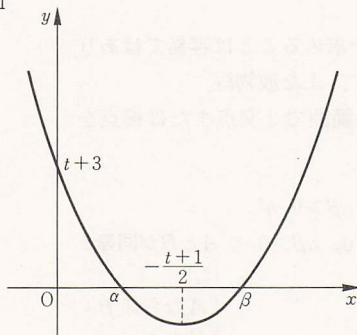
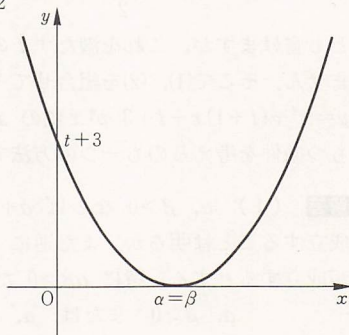
$$\boldsymbol{-3<t\leqq 1-2\sqrt{3}}.$$

(3)の 別解　2次方程式

$$x^2+(t+1)x+t+3=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

が $\alpha$, $\beta>0$ なる2根をもつとは，放物線

$$y=x^2+(t+1)x+t+3 \quad \cdots\cdots ⑥$$

が $x$ 軸の $x>0$ の部分に共有点をもち，$x\leqq 0$ の部分に共有点をもたないことである．すなわち，$x$ 軸の $x>0$ の部分と2つの交点をもつか，または接することである．したがって，⑥のグラフは図1または図2のようになっていなければならない．

ここで，放物線⑥と $y$ 軸の交点は $(0,\ t+3)$，対称軸は $x=-\dfrac{t+1}{2}$，また，判別式は $D=t^2-2t-11$ である．よって，放物線⑥が図1または図2のような位置にあるための条件は

$x$ 軸と共有点をもち，$y$ 軸の正の部分と交わり，対称軸が $y$ 軸より右側にある．

$$\begin{cases} D\geqq 0 \\ t+3>0 \\ -\dfrac{t+1}{2}>0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} t\leqq 1-2\sqrt{3} \text{ または } t\geqq 1+2\sqrt{3} \\ t>-3 \\ t<-1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-3<t\leqq 1-2\sqrt{3}}.$$

## B. 605

放物線 $y=x^2-2ax-a$ に対し

(1)　$x$ 軸の $x<1$ を満たす部分と 2 つの交点をもつ条件を求めよ。

(2)　$x$ 軸の $x<1$ を満たす部分に 1 つ，$x>1$ を満たす部分に 1 つ交点をもつ条件を求めよ。

**アプローチ** これは B. 604 (3) と類似した内容をもっています．B. 604 (3)のどちらの方法でもできますが，別解の方が応用しやすいでしょう．

**解答** （1） 放物線 $y=x^2-2ax-a$ が図 1 のようになっていればよい．すなわち，

$x$ 軸と 2 交点をもち，

直線 $x=1$ の $y>0$ の部分と交わり，

対称軸が直線 $x=1$ より左側にある．

◀接してはいけない．

ここで判別式は

$$D=4a^2+4a=4a(a+1)$$

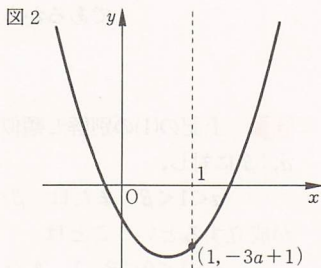
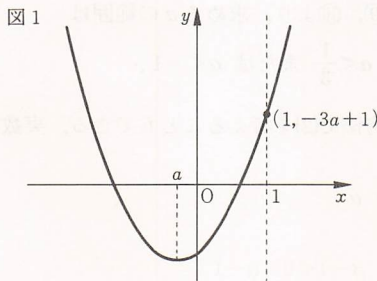
$x=1$ のときの $y$ の値は

$$1^2-2a\cdot 1-a=-3a+1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

対称軸は $x=a$ である．よって，求める条件は

$$\begin{cases} 4a(a+1)>0 \\ -3a+1>0 \\ a<1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a>0 \text{ または } a<-1 \\ a<\dfrac{1}{3} \\ a<1 \end{cases}$$

◀重根をもってはいけない．

$$\therefore \quad \boldsymbol{0<a<\frac{1}{3}} \text{ または } \boldsymbol{a<-1}.$$

（2） 放物線 $y=x^2-2ax-a$ が図 2 のように，直線 $x=1$ の $y<0$ の部分と交わればよい．

よって，①から，

$$-3a+1<0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a>\frac{1}{3}}.$$

(1)の別解　2次方程式

$$x^2-2ax-a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

が，$\alpha$，$\beta<1$ なる2つの異なる実根 $\alpha$，$\beta$ をもつ条件を求める．まず，実数 $\alpha$，$\beta$ に対し，$\alpha$，$\beta<1$ が成立するということは，

$$\alpha-1,\ \beta-1<0$$

が成立するということであり，これはさらに

$$\begin{cases}(\alpha-1)+(\beta-1)<0 & \cdots\cdots ③\\ (\alpha-1)(\beta-1)>0 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$

B. 604 (1)と同様▶ が成立することと同じである．③，④は

$$\begin{cases}\alpha+\beta-2<0 & \cdots\cdots ⑤\\ \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0 & \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

と書き換えられ，また②より

B. 110 (2)▶

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2a & \cdots\cdots ⑦\\ \alpha\beta=-a & \cdots\cdots ⑧\end{cases}$$

が成立するから，⑤，⑥は

$$\begin{cases}2a-2<0\\ -a-2a+1>0\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases}a-1<0\\ -3a+1>0\end{cases}$$

$$\therefore\quad a<\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots ⑨$$

となる．また②が異なる2つの実根をもつ条件は

$$4a^2+4a>0 \quad \therefore \quad a>0 \text{ または } a<-1 \cdots\cdots ⑩$$

であるから，⑨，⑩より，求める $a$ の範囲は

$$\boldsymbol{0<a<\frac{1}{3}} \text{ または } \boldsymbol{a<-1}.$$

注意　上記の(1)の別解と類似の方法で(2)を考えることもできる．実数 $\alpha$，$\beta$ に対し，

$$\alpha<1<\beta \quad \text{または} \quad \beta<1<\alpha$$

が成立するということは

$$\alpha-1<0<\beta-1 \quad \text{または} \quad \beta-1<0<\alpha-1$$

つまり，$(\alpha-1)(\beta-1)<0$

が成立するということである．この条件は⑦，⑧を用いると $a$ で表せる．

## B.606

$$f(x)=2x^2+ax+a^2-1$$

とおく．ただし $a$ は実数の定数である．

(1)　方程式 $f(x)=0$ が根をもつような $a$ の範囲を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ の根の動きうる範囲を求めよ．

**アプローチ**　「根をもつ」というのは，数Iでは「実数の範囲に」です．(1)　B.114 と同様に放物線の頂点の $y$ 座標や判別式を使えば簡単でしょう．

(2)　$x=0$ が $f(x)=0$ の解となる $a$ の値を求められますか？

$f(0)=a^2-1$ ですから $a^2-1=0$ より $a=\pm 1$．これは簡単．

それでは $x=1$ が $f(x)=0$ の解となる $a$ の値は？

$$f(1)=2+a+a^2-1=a^2+a+1$$

さて $a^2+a+1=0$ より $a=\cdots\cdots$？　$a$ は存在しません．これは $x=1$ が $f(x)=0$ の根となり得ないことを意味します．それではどんな数 $x$ なら $f(x)=0$ の根となり得るでしょうか．

**解答**　**(1)**　$f(x)=2x^2+ax+a^2-1$ の判別式は　◀☞B.108

$$D=a^2-4\cdot 2(a^2-1)=-7a^2+8$$

$f(x)=0$ が実根をもつ条件は

$$D\geqq 0$$

$$\therefore\quad -7a^2+8\geqq 0 \qquad \therefore\quad a^2\leqq\frac{8}{7}$$

$$\therefore\quad -\sqrt{\frac{8}{7}}\leqq a\leqq\sqrt{\frac{8}{7}}.$$

**(2)**　実数 $x$ が方程式 $f(x)=0$ の実根となるような $a$ の値は，$f(x)=0$，すなわち

$$2x^2+ax+a^2-1=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\ ①$$

を $a$ について解くことによって得られる．したがって実数 $x$ が（$a$ を適当に選ぶことによって）$f(x)=0$ の根となりうるための条件は，①を満たす実数 $a$ が存在することである．①を $a$ について整理すると $a^2+xa+2x^2-1=0$ となるから実根 $a$ をもつ条件は

◀①を $a$ についての方程式と見なす．

$$x^2-4(2x^2-1)\geqq 0$$

$$\therefore\quad -7x^2+4\geqq 0$$

$$\therefore\quad -\frac{2}{\sqrt{7}}\leqq x\leqq\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

## B.607

$xy$ 平面上を動く点 P$(x,\ y)$ に対し

$$z=x^2+xy-y^2+x-y+1$$

で定まる量 $z$ を考える．

(1)　点Pが直線 $y=x$ 上を動くとき，$z$ の最大値，最小値について調べよ．

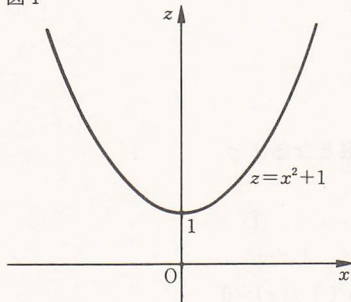
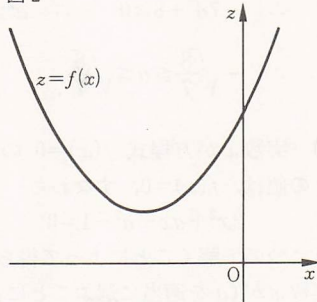
(2)　点Pが直線 $y=mx$ 上を動くとき，$z$ が最小値をもつような定数 $m$ の範囲を定めよ．

(3)　(2)において最小値が正であるような $m$ の範囲を求めよ．

**アプローチ** (1)　点Pの $x$ 座標を $x$ とすると $y$ 座標も $x$ ですから，$z$ は $x$ の 2 次関数になります．(2)，(3)では，2 次関数の係数が $m$ とともに変化します．$z$ が最小値をもつとは，またその最小値が正であるとは，2 次関数のグラフがどうなっているということでしょう．

点Pは直線 $y=x$ 上にある．▶ **解答** **(1)**　点Pの $x$ 座標を $x$ とすると $y$ 座標も $x$ となるから，

$$z=x^2+x\cdot x-x^2+x-x+1=x^2+1$$

よって，$z$ は **最小値 1** をもち，**最大値をもたない**（図 1）．

点Pは直線 $y=mx$ 上にある．▶ **(2)**　点Pの $x$ 座標を $x$ とすると $y$ 座標は $mx$ であるから，

$$\begin{aligned} z&=x^2+x\cdot mx-(mx)^2+x-mx+1 \\ &=(-m^2+m+1)x^2+(1-m)x+1 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

この右辺を $f(x)$ とおく．

$x^2$ の係数の符号 ▶　次の 3 つの場合に分けて考える．

**1°**　$-m^2+m+1=0$ のとき，すなわち

$m^2-m-1=0$　∴　$m=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

のとき，$f(x)$ は1次関数 $\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}x+1$ となり，

最小値をもたない．

**2°**　$-m^2+m+1>0$ のとき，すなわち

$m^2-m-1<0$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

のとき，$z=f(x)$ のグラフは図2のように上に向ってのびる放物線となり，最小値をもつ．

**3°**　$-m^2+m+1<0$ のとき，$z=f(x)$ のグラフは下に向ってのびる放物線となり，最小値をもたない．

以上により，$f(x)$ が最小値をもつ条件は

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.\quad\cdots\cdots\ ②$$

**(3)**　$m$が②の範囲にあるとする．このとき$f(x)$の最小値が正であるとは，$z=f(x)$ のグラフが(図2のように)$x$軸と共有点をもたないことである．

ここで$f(x)$の判別式は①より

◀ ☞B. 108

$$D=(1-m)^2-4(-m^2+m+1)$$
$$=5m^2-6m-3$$

であるから，$z=f(x)$ のグラフが$x$軸と共有点をもたない条件は $D<0$，すなわち

$$5m^2-6m-3<0$$

◀ $5m^2-6m-3=0$ の根は$\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{5}$

$$\therefore\quad \frac{3-2\sqrt{6}}{5}<m<\frac{3+2\sqrt{6}}{5}\quad\cdots\cdots\ ③$$

よって，求める$m$の範囲は②かつ③を満たす範囲となるが，

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<\frac{3-2\sqrt{6}}{5}<\frac{3+2\sqrt{6}}{5}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

◀ $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}1.618\cdots\cdots\\-0.618\cdots\cdots\end{cases}$

$\dfrac{3\pm2\sqrt{6}}{5}=\begin{cases}1.579\cdots\cdots\\-0.379\cdots\cdots\end{cases}$

であるから，

$$\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{6}}{5}<m<\frac{3+2\sqrt{6}}{5}}$$

となる．

## B. 608

(1)　放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=2x-2$ の共有点を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつような定数 $k$ の範囲を求めよ．

(3)　放物線 $y=x^2-x$ に直線 $y=2x+k$ が接するように定数 $k$ の値を定め，接点の座標を求めよ．

**アプローチ**　放物線 $y=f(x)$ と $x$ 軸の共有点，接点の $x$ 座標はそれぞれ，方程式 $f(x)=0$ の根，重根でした．この問題では $x$ 軸以外の直線との共有点，接点を求めます．

この考え方が基本．

**解答**　(1)　放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=2x-2$ の共有点の $x$ 座標は，方程式

$$x^2-x=2x-2$$

の根である．これを解くと

$$x^2-3x+2=0 \qquad \therefore \quad (x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore \quad x=1,\ 2$$

$y$ 座標は $y=x^2-x$（または $y=2x-2$）から分かる．

よって，共有点は **(1, 0)** と **(2, 2)** である．

(2)　放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=2x+k$ が共有点をもつ条件は，方程式

$$x^2-x=2x+k \qquad \therefore \quad x^2-3x-k=0 \quad \cdots ①$$

☞ B. 108

が実根をもつことである．判別式は

$$D=(-3)^2-4(-k)=9+4k \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

であるから，実根をもつ条件は $D \geqq 0$　すなわち

$$9+4k \geqq 0 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k \geqq -\frac{9}{4}}.$$

この考え方が基本．

(3)　放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=2x+k$ が接する条件は，方程式①が重根をもつことである．

よって，判別式②を用いて

$$D=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{9}{4}$$

このとき方程式①は

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=0 \qquad \therefore \quad \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

$y$ 座標は $y=x^2-x$ $\left(\text{または } y=2x-\frac{9}{4}\right)$ から分かる．

となり，重根 $x=\frac{3}{2}$ をもつ．すなわち，

接点の座標は $\boldsymbol{\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)}$ である．

## B. 609

(1)　放物線 $y=x^2-2x+2$ に接し $(-1,\ -4)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $(t,\ at^2+bt+c)$ における接線の傾きを求めよ．

**アプローチ**　(1)　点 $(-1,\ -4)$ を通る直線は無数にありますが，そのうち放物線 $y=x^2-2x+2$ に接するものを求めたいのです．
点 $(-1,\ -4)$ を通る直線は一般にどういう形をしているかを考え，B. 608 (3)の接線を求める方法を応用します．

(2)　考え方は(1)と何も異なる所はありません．

**解答**　**(1)**　点 $(-1,\ -4)$ を通り傾きが $m$ である
直線　$y=m(x+1)-4$　　∴　$y=mx+m-4$
が放物線 $y=x^2-2x+2$ に接する条件は，方程式

$$x^2-2x+2=mx+m-4$$

$$\therefore\quad x^2-(m+2)x-m+6=0$$

が重根をもつことである．判別式は　◀☞ B. 608 (3)

$$D=\{-(m+2)\}^2-4(-m+6)=m^2+8m-20$$　◀☞ B. 108

$$=(m+10)(m-2)$$

であるから，重根をもつ条件 $D=0$ より
$m=-10,\ 2$．
　よって求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-10x-14}\quad と\quad \boldsymbol{y=2x-2}$$

である．

**(2)**　求める接線の傾きを $m$ とすると，方程式

$$ax^2+bx+c=m(x-t)+at^2+bt+c$$

が重根をもつことになる．移項して

$$ax^2+bx-at^2-bt-m(x-t)=0$$　◀因数分解できる！

$$a(x+t)(x-t)+b(x-t)-m(x-t)=0$$　◀ $x^2-t^2=(x-t)(x+t)$

$$\therefore\quad \{a(x+t)+b-m\}(x-t)=0$$

$$\therefore\quad (ax+at+b-m)(x-t)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-at-b+m}{a}\ \text{または}\ x=t$$

これが重根であることから　◀判別式を使ってもよい．

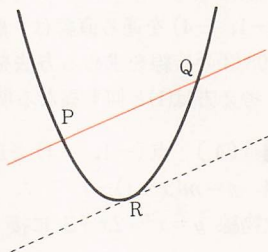
$$\frac{-at-b+m}{a}=t\qquad \therefore\quad \boldsymbol{m=2at+b}．$$

## B. 610

放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の異なる3点P，Q，Rの $x$ 座標をそれぞれ $p$，$q$，$r$ とする．

(1)　直線PQの傾きを $p$，$q$ で表せ．

(2)　点Rにおける接線が直線PQに平行であるとき，$r$ を $p$，$q$ で表せ．

**アプローチ**　図を描いてみると $r$ が $p$ と $q$ の間にあるらしいことが分かりますが，実際計算すると，$r$ は $p$ と $q$ の極めて単純な式で表されます．点Rにおける接線の傾きはB. 609(2)の結果から分かります．

**解答**　(1)　$P(p, ap^2+bp+c)$，　$Q(q, aq^2+bq+c)$ を結ぶ直線の傾きは

分子を因数分解する．B. 110(2)やB. 609と同じ計算!

$$\frac{(ap^2+bp+c)-(aq^2+bq+c)}{p-q}$$

$$=\frac{a(p^2-q^2)+b(p-q)}{p-q}$$

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)$

$$=\frac{a(p+q)(p-q)+b(p-q)}{p-q}$$

$p-q$ で約分する

$$=\frac{\{a(p+q)+b\}(p-q)}{p-q}$$

$$=\boldsymbol{a(p+q)+b}.$$

☞ B. 609(2)

(2)　点Rにおける接線の傾きは $2ar+b$ であるから，点Rにおける接線と直線PQが平行であるための条件は

$$a(p+q)+b=2ar+b$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r=\frac{p+q}{2}}.$$

**注意**　(1)において $q$ を $p$ に近づけると直線の傾きは $2ap+b$ に近づく．これは点Pにおける接線の傾きに等しい(☞ B. 609)．

## B. 611

空気抵抗が無視できるほど小さいとき，地表から打ち出された物体は地表面に垂直な軸をもつ放物線を描く．水平方向から45°上向きに地表から打ち出された物体が100m先の地表に落下した．最高点の高さを求めよ．

**アプローチ** これは「放物線」の語源です．右図を見ながら，放物線の接線の意味を考えましょう．

**解答** 物体が描いた放物線を含む平面に座標軸を定める．物体が打ち出された点を原点として水平方向に$x$軸をとり，垂直上方に$y$軸をとる．また物体が落下した地点を$(100,\ 0)$とする．

放物線の方程式を

$$y=ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とおく．2点$(0,\ 0)$，$(100,\ 0)$を通ることから

$$\begin{cases} 0=c \\ 0=10000a+100b \end{cases} \qquad \therefore \quad b=-100a$$

◀打ち出した点と落下した点

よって，①は

$$y=ax^2-100ax \quad \cdots\cdots \text{②}$$

となる．

さて，原点から打ち出した角度が45°であるとは，放物線②の原点における接線の傾きが1であるということである．②の原点における接線の傾きは$-100a$であるから，

◀接線の意味

$$-100a=1 \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{100}$$

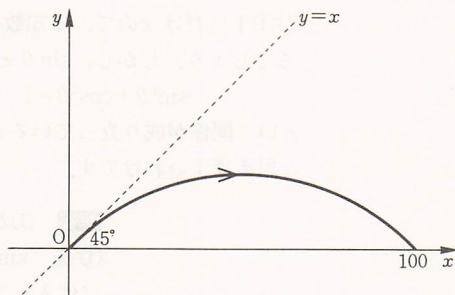
◀接線の傾きは ☞B. 609 (2)

したがって，②は

$$y=-\frac{1}{100}x^2+x$$

となる．右辺を平方完成すると

$$y=-\frac{1}{100}(x-50)^2+25$$

となるから，最高点の高さは **25 m** である．

## B.612

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ なる $\theta$ が

$$2\sin\theta+\cos\theta=1 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たすとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

**アプローチ** B.204 のように $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の間に対称性がないので，両辺を平方しても無駄です．未知数が，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の 2 つで，方程式が① 1 つだけなので，未知数を決定できないのでは，と考える人もいるでしょう．しかし，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の間には，つねに

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots\cdots ②$$

という関係が成り立っているので，①と②の連立方程式が与えられたと思えばよいわけです．

**解答** ①から，$\cos\theta=1-2\sin\theta \quad \cdots\cdots ①'$

①′を　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \quad \cdots\cdots ②$

に代入して $\cos\theta$ を消去すると，

$$\sin^2\theta+(1-2\sin\theta)^2=1$$

$$\therefore \quad \sin\theta(5\sin\theta-4)=0$$

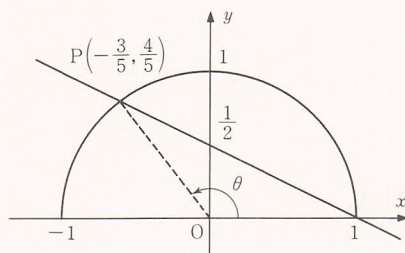
$$\therefore \quad \sin\theta=0 \text{ または } \sin\theta=\frac{4}{5}$$

を得る．

$\sin\theta=0$ のとき，①′から $\cos\theta=1$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ のとき，①′から $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

であるので，以上まとめて

$$\begin{cases}\sin\theta=0\\ \cos\theta=1\end{cases} \text{ または } \begin{cases}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

[注]　単位円上の動点 $P(x, y)$ に対し，動径 OP の $x$ 軸からの回転角を $\theta$ とするとき，

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$$ であるので，

本問は直線 $2y+x=1$ と単位円との交点を求めることに相当している．

## B.613

次の方程式，不等式を解け．

ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする．

(1)　$2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

(2)　$2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 \leqq 0$

**アプローチ**　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いれば，(1)，(2)の左辺は，$\sin\theta$ の2次式に書き換えられます．

**解答**　（1）　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を用いて，与えられた方程式を変形すると，

$$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$$

$$\therefore\quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) = 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad または \quad \sin\theta = 1$$

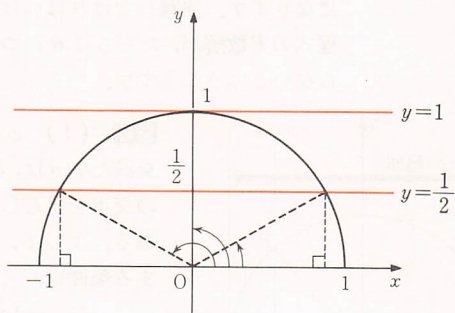
となる．

よって，求める $\theta$ の値は

**$\theta = 30°$ または**

**$\theta = 150°$ または**

**$\theta = 90°$**

である．

（2）　(1)と同様に変形すると

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 \geqq 0$$

$$\therefore\quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 1) \geqq 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta \leqq \frac{1}{2} \quad または \quad \sin\theta \geqq 1 \cdots ①$$

となるが，つねに $\sin\theta \leqq 1$ なので，①は，

$$\sin\theta \leqq \frac{1}{2} \quad または \quad \sin\theta = 1$$

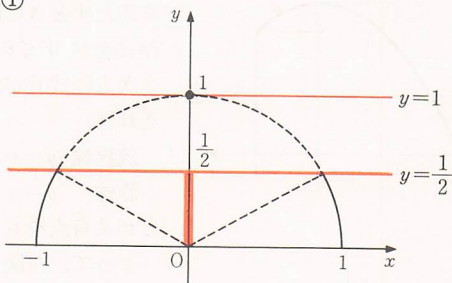
と同値である．

よって，求める $\theta$ の値の範囲は

**$0° \leqq \theta \leqq 30°$ または**

**$150° \leqq \theta \leqq 180°$ または**

**$\theta = 90°$**

である．

## B. 614

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする.

(1)　$\theta$ の方程式

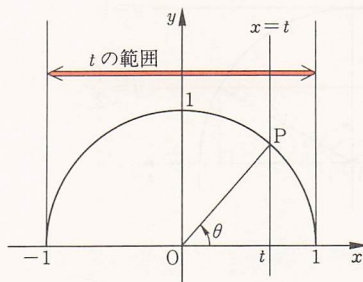
$$\cos\theta = t$$

が解をもつような, 定数 $t$ の値の範囲を求めよ.

(2)　$\theta$ の方程式

$$\sin^2\theta + \cos\theta - a = 0 \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

が解をもつような, 定数 $a$ の値の範囲を求めよ.

**アプローチ**　(2)では, $\cos\theta = t$ と置き換えればⒶは $t$ の2次方程式になります. 注意しなければいけないのは, この $t$ についての2次方程式の実数解が, ただちに $\theta$ についての方程式の実数解になるとは限らないということです.

**解答**　(1)　$\cos\theta = t$ $\cdots\cdots$ ①

を満たす $\theta$ は, 原点を中心とする単位円と直線 $x=t$ の交点をPとして, 動径OPの $x$ 軸からの回転角である. よって, ①を満たす $\theta$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ が存在する条件は,

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1} \quad \cdots\cdots ②$$

である.

(2)　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を用いてⒶから $\sin\theta$ を消去し, ①とおくと, Ⓐは

$$-t^2 + t + 1 = a \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

となる.

①で定まる $\theta$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ は, (1)により, $t$ が②を満たすときに限り存在する. したがって, $\theta$ の方程式Ⓐが $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲に解をもつのは, $t$ の2次方程式Ⓑが②の範囲内に解をもつとき, いい換えれば,

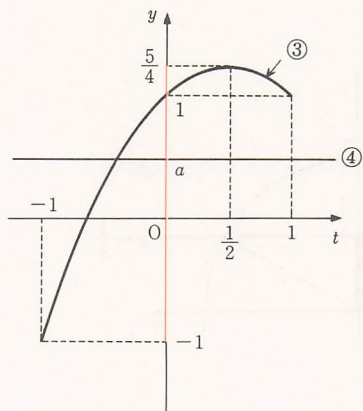
放物線　$y = -t^2 + t + 1$ $\cdots\cdots$ ③　の②の部分と

直線　$y = a$ $\cdots\cdots$ ④

とが共有点をもつときとなる.

よって, 左図より, 求める $a$ の値の範囲は,

$$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq \frac{5}{4}}$$

である.

## B.615

1，2，$x$ を3辺の長さにもつ△ABCを考える．
(1) △ABCが存在するような $x$ の値の範囲を求めよ．
(2) △ABCが鋭角三角形となるような $x$ の値の範囲を求めよ．
(3) △ABCが鈍角三角形となるような $x$ の値の範囲を求めよ．

**アプローチ** (1)　$a$，$b$，$c$ を3辺の長さにもつ三角形が存在するための条件は，　$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$　です．

これは，$|b-c|<a<b+c$　と同値変形できます．

(2)　$a$，$b$，$c$ を3辺の長さとする△ABCにおいて，$\angle A<90°$ となる条件は

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0 \quad \therefore \quad a^2<b^2+c^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{㋐}$$

となることです．したがって，△ABCが鋭角三角形になるための条件は，㋐に加えて，$b^2<c^2+a^2$ かつ $c^2<a^2+b^2$ が成り立つことです．逆に，これらが成り立つとき，$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ も成り立ちます．

**解答** **(1)**　長さ1，2，$x$ の3辺をもつ三角形が存在するためには，

$$|1-2|<x<1+2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{1<x<3} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

であることが必要十分である．

**(2)**　△ABCが鋭角三角形となるためには，

$$\begin{cases} 1^2<2^2+x^2 \\ 2^2<x^2+1^2 \\ x^2<1^2+2^2 \end{cases} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sqrt{3}<x<\sqrt{5}} \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

であることが必要十分である．

**(3)**　△ABCが鈍角三角形となるためには，まず，①が成り立つことが必要である．

これに加え，以下の条件が成立すればよい．

i)　$x$ が最大辺のとき，

$$x^2>1^2+2^2 \quad \therefore \quad x>\sqrt{5} \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

ii)　2が最大辺のとき，

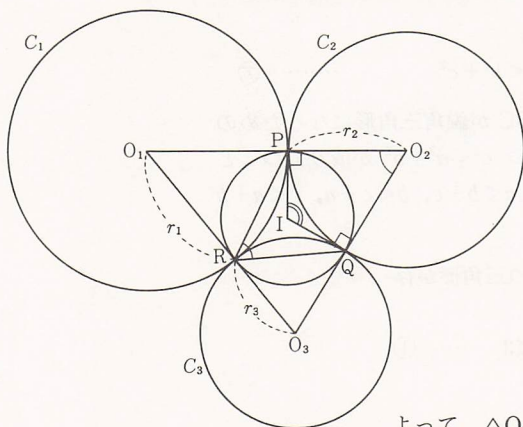
$$2^2>1^2+x^2 \quad \therefore \quad x<\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

よって，①かつ（③または④）より

$\boldsymbol{1<x<\sqrt{3}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt{5}<x<3}$　を得る．

## B.616

平面上に3点$O_1$，$O_2$，$O_3$を中心とする半径がそれぞれ$r_1$，$r_2$，$r_3$ $(r_1>r_2>r_3)$の3つの円$C_1$，$C_2$，$C_3$がある．$C_1$と$C_2$は点Pで，$C_2$と$C_3$は点Qで，$C_3$と$C_1$は点Rで，それぞれ外接している．$\triangle O_1O_2O_3$の内接円の半径が$\sqrt{3}$，外接円の半径が$3+\sqrt{3}$であり，$\angle PRQ=60°$であるとき，$r_1$，$r_2$，$r_3$を求めよ．

**アプローチ▶** 円の接線に関する性質や，正弦定理，三角形の面積の公式などを用いる総合問題です．

**解答** $\triangle O_1O_2O_3$の内心をIとおくと，$\angle IPO_2=\angle IQO_2=90°$であるので，

$$\angle PIO_2=\frac{1}{2}\angle PIQ$$
$$=\angle PRQ=60°$$

$\therefore\quad PO_2=PI\tan 60°$

$\therefore\quad r_2=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\mathbf{3}$　……①

また，$\angle PO_2Q=180°-\angle PIQ=60°$であるので，$\triangle O_1O_2O_3$で正弦定理を用いると，$\dfrac{O_1O_3}{\sin 60°}=2(3+\sqrt{3})$

$\therefore\quad r_1+r_3=\sqrt{3}(3+\sqrt{3})$　……②

よって，$\triangle O_1O_2O_3$の面積$S$は，①，②の下で，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ▶

$$S=\frac{1}{2}O_2O_1\cdot O_2O_3\sin 60°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(r_1+r_2)(r_2+r_3)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{r_1r_3+r_2(r_1+r_3)+r_2^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(18+9\sqrt{3}+r_1r_3)\quad\cdots\cdots③$$

と表される．また，一方で，$\triangle O_1O_2O_3$をIを頂点とする3つの三角形に分割することにより，

$S=r\cdot\dfrac{a+b+c}{2}$ ▶

$$S=\sqrt{3}(r_1+r_2+r_3)=\sqrt{3}(6+3\sqrt{3})\quad\cdots\cdots④$$

も成り立つ．したがって，③，④から，

$$r_1r_3=\sqrt{3}(3+2\sqrt{3})\quad\cdots\cdots⑤$$

$r_1$，$r_3$を解にもつ2次方程式 $t^2-\sqrt{3}(3+\sqrt{3})t+\sqrt{3}(3+2\sqrt{3})=0$ ▶

となり，②，⑤を連立し，$r_1>r_3$を考えて

$r_1=\mathbf{3+2\sqrt{3}}$，$r_3=\mathbf{\sqrt{3}}$　を得る．

## B. 617

鋭角 $\theta$ をなす半直線OX，OY上にそれぞれ両端P，Qをおく長さ $l$(一定)の動線分がある．

(1)　P，QにおいてそれぞれOX，OYに立てた垂線の交点をTとすると，OTの長さは一定であることを示せ．

(2)　OPの長さの範囲を求めよ．

(3)　△OPQの面積の最大値を求めよ．

**アプローチ**　△OPQの外接円上にTがあることを見抜ければ，難かしくありません．

**解答**　**(1)**　∠OPT＝∠OQT＝90° より，四角形OPTQはある円に内接し，OTはその円の直径である．一方，その円は，△OPQの外接円でもあるので，その半径 $R$ は正弦定理により，

$$R=\frac{l}{2\sin\theta}.$$

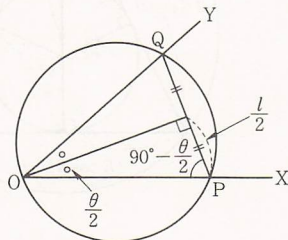
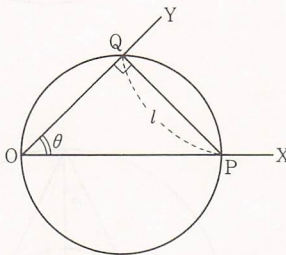
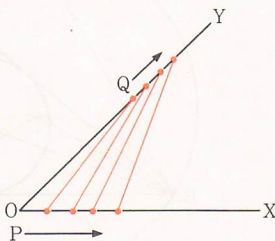
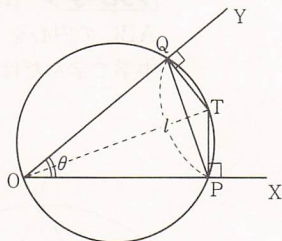
ゆえに，$\mathrm{OT}=2R=\dfrac{l}{\sin\theta}=$一定　である．■

**(2)**　まず，右図においてPがOに一致している状態からPを右に移動できるので，OP≧0 である．そこで，右に移動できる限界を求めよう．

(1)により，OPは半径 $R=\dfrac{l}{2\sin\theta}$ の円に内接する△OPQの1辺であるので，その最大はOPがその円の直径 $\dfrac{l}{\sin\theta}$ に一致するときである．

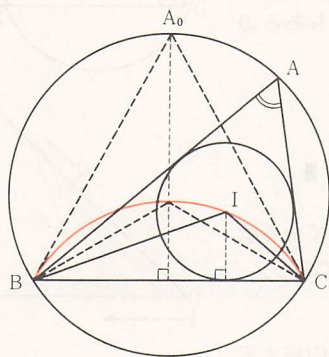
ゆえに，$\boldsymbol{0\leqq \mathrm{OP}\leqq\dfrac{l}{\sin\theta}}$ である．

**(3)**　PQを固定し，代りに△OPQの外接円上をOが動くと考える．△OPQの面積が最大となるのは，PQに対する高さが最大となるとき，すなわち，線分PQの垂直2等分線と△OPQの外接円の交点にOが来たときである．よって，△OPQの面積の最大値は

$$\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\tan\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{l^2}{4\tan\dfrac{\theta}{2}}}$$　である．

## B. 618

(1)　定円上に2点B，Cを固定し，点AをB，Cを両端とする1つの弧上で動かすとき，△ABCの内接円の半径が最大となるのは，AB=AC のときであることを証明せよ．

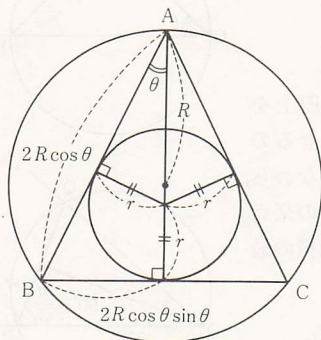
(2)　三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ $R$，$r$ とするとき，つねに，$R \geqq 2r$ が成り立つことを証明せよ．

**アプローチ**　(1)が(2)の重大なヒントになっているのです．(1)では，△ABCの内心をIとすると，∠BIC=90°+(1/2)∠BAC となることは，中学で学んだはずです．

**解答**　(1)　∠BAC=一定 であるが，△ABCの内心をIとおくと，BI, CI はそれぞれ∠B，∠Cの二等分線なので，

$$\angle \mathrm{BIC}=180^\circ-\frac{180^\circ-\angle \mathrm{BAC}}{2}$$

$$=90^\circ+\frac{\angle \mathrm{BAC}}{2}=\text{一定}$$

となる．よって，Iはある円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ を描く．内接円の半径は，IからBCに至る距離であるのでIが弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ の中点に来たとき，つまり

AB=AC のときに最大となる．■

(2)　$R$ を定数とし，半径 $R$ の円に内接する三角形ABCの内接円の半径を $r$ として，$r$ の最大値が $\dfrac{R}{2}$ 以下であることを示せばよいが，(1)で示した事実により，△ABCは AB=AC の二等辺三角形であるとして一般性を失なわない．

そこで，頂角∠Aを $2\theta$ とおくと，

$$r=2R(1-\sin\theta)\sin\theta$$

$$=-2R\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{R}{2}$$

(内接円の半径の求め方は ☞ A2.3 V)

となる．したがって，つねに

**$2r \leqq R$**　が成り立つ．■

## B. 619

1辺の長さ $2a$ の正方形ABCDを底面とし，Oを頂点とする正四角錐において，底面と斜面のなす2面角が45°のとき，次の2面角を求めよ．

(1)　向い合う2つの斜面の2面角 $\alpha$．

(2)　となり合う2つの斜面の2面角 $\beta$．

**アプローチ**　2面角の定義は，B.221で学びました．

**解答**　**(1)**　辺AB，BC，CDの中点をそれぞれL，M，Nとおくと，向い合う2つの斜面OAB，OCDのなす角 $\alpha$ は，∠LONである．

頂点Oから底面ABCDに下した垂線の足Hは正方形ABCDの中心であり，与えられた条件より，∠OLH=45° であるので，

$$OL=ON=\sqrt{2}\,a$$

さらに，$LN=2a$ より，$\alpha=\mathbf{90°}$．

◀ $\cos\alpha=\dfrac{OL^2+ON^2-LN^2}{2OL\cdot ON}=0$

**(2)**　LからOBに下した垂線の足をPとすると，

MP⊥OB でもあるので，となり合う2つの斜面OAB，OBCのなす角 $\beta$ は，∠LPMである．

$$\begin{cases} BL=BM=a \\ \angle LBM=90° \end{cases} \text{より}\ LM=\sqrt{2}\,a$$

また，∠OLB=90°，$LB=a$，$OL=\sqrt{2}\,a$ より，

$$OB=\sqrt{LB^2+OL^2}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3}\,a.$$

よって，△OLBの面積の2倍を考えると，

$$OB\cdot LP=LB\cdot OL$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}\,a\cdot LP=a\cdot\sqrt{2}\,a$$

$$\therefore\quad LP=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

が得られる．

◀ ∠LOB=$\theta$ とおき，

$LP=OL\sin\theta=\sqrt{2}\,a\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}\,a}$

としてもよい．

そこで，△LPMで余弦定理を用いると，

$$\cos\beta=\frac{LP^2+PM^2-LM^2}{2LP\cdot PM}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2-(\sqrt{2}\,a)^2}{2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2}=-\frac{1}{2}$$

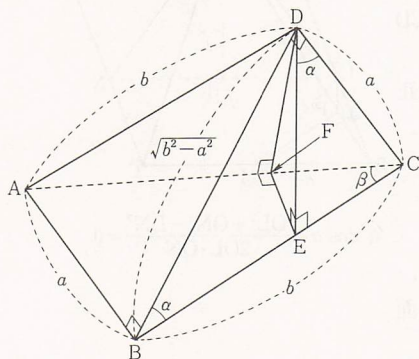
$$\therefore\quad \beta=\mathbf{120°}.$$

## B.620

$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{BC}=b\,(a<b)$ の長方形 ABCD がある．この長方形を対角線 AC を折り目として，頂点 D から平面 ABC に引いた垂線が辺 BC 上の点 E で交わるように折り曲げる．

(1)　DE の長さを求めよ．

(2)　2 平面 ABC，ADC のなす角 $\theta$ の余弦を求めよ．

**アプローチ**　まず，折り曲げて作られる四面体の見取り図を描きます．(2)では，三垂線の定理が必要です．

**解答**　**(1)**　平面 BDC が AB に垂直なので

$\angle\mathrm{ABD}=90°$

$\therefore\quad \mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{b^2-a^2}$

であるが，これより

$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=b^2=\mathrm{BC}^2$

$\therefore\quad \angle\mathrm{BDC}=90°$

そこで，$\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{CDE}=\alpha$ とおくと

$\mathrm{DE}=\mathrm{BD}\sin\alpha=\boldsymbol{\sqrt{b^2-a^2}\cdot\dfrac{a}{b}}$．

**(2)**　E から AC に垂線 EF を下すと，三垂線の定理により，$\mathrm{DF}\perp\mathrm{AC}$ となる．

よって，2 面 ABC，ADC のなす角 $\theta$ は，$\angle\mathrm{DFE}$ である．

ところで，$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}\sin\alpha=a\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2}{b}$

であるので，$\angle\mathrm{ACB}=\beta$ とおけば

$$\mathrm{EF}=\mathrm{CE}\sin\beta=\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

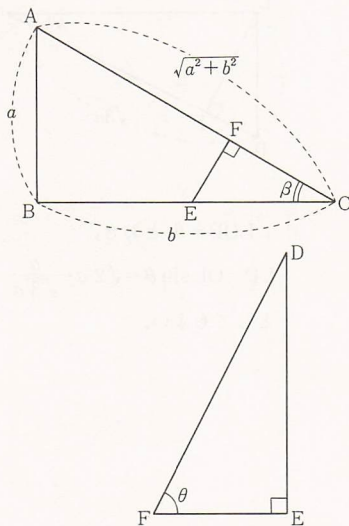
となる．よって，$\angle\mathrm{ADC}=90°$ より，

$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{AC}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}$

$\therefore\quad \mathrm{DF}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=b\cdot a$

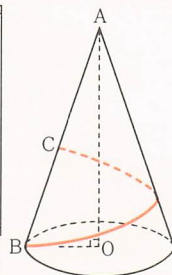
$\therefore\quad \mathrm{DF}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$．

$$\text{ゆえに，}\cos\theta=\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}}=\frac{\dfrac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}}}{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\boldsymbol{\frac{a^2}{b^2}}$$

である．

## B.621

中心O，半径 $a$ の円を底面，Aを頂点とする母線の長さが $6a$ である直円錐がある．いま，1本の母線ABの中点をCとし，Cから直円錐の側面を

　(1)　1巻　　　(2)　2巻

してBに至る最短の曲線の長さ $l_1$，$l_2$ をそれぞれ求めよ．

**アプローチ**　平面上の2点P，Q間の最短距離とは，線分PQの長さです．では，円錐の側面上の2点B，C間の最短距離とは？

**解答**　母線ABに沿って切り開くと，右図のような展開図となる．$\angle BAB'=\theta$ とおき底円の円周を考えると，

$$2\pi\cdot 6a\cdot\frac{\theta}{360^\circ}=2\pi a$$

が成り立ち，これより $\theta=60^\circ$.

**(1)**　直円錐の側面上での最短の1巻きする道すじは，右図の平面上で，BからC′に至る最短の道すじ，つまり線分BC′である．

よって，$\angle BC'A=90^\circ$ より

$$l_1=BC'$$
$$=AB\sin 60^\circ=\mathbf{3\sqrt{3}\,a}.$$

**(2)**　2巻きする道すじは，右図の平面上で，BからAB′上の点Pを経てCに向かう道すじなので，線分の長さの和 $BP+PC$ の最小値が求める $l_2$ である．

CのAB′に関する対称点をDとすると，

$PC=PD$ であるので，

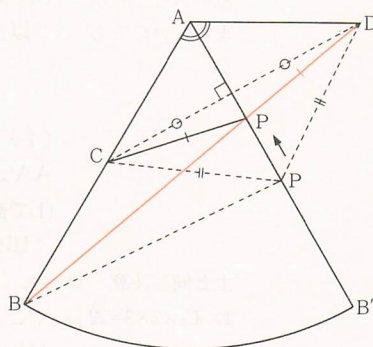
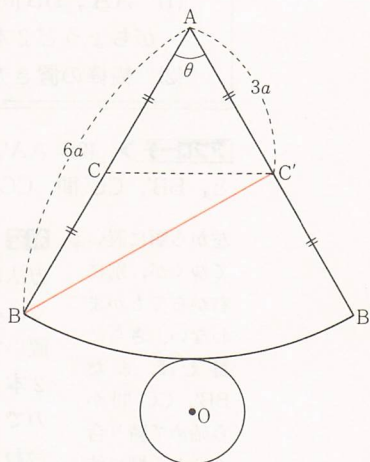
$$BP+PC=BP+PD\geqq BD$$

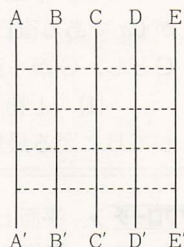
となり，この等号はPがBDとAB′の交点に来たときに限り成立する．

よって，最短の道すじは線分BDである．

$\angle BAD=120^\circ$，$AB=6a$，$AD=3a$ より，△BADで余弦定理を適用すれば，

$$l_2{}^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos 120^\circ$$
$$=(6a)^2+(3a)^2-2\cdot 6a\cdot 3a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=63a^2$$

$\therefore$　$l_2=\mathbf{3\sqrt{7}\,a}.$

## B.622

右図のように AA′, BB′, CC′, DD′, EE′ の5本の縦棒が距離 $a$ の間隔で並んでいる．いま，長さ $a$ の棒5本を図の点線上に両端が縦棒上にあるように置いてゆく．

ただし，隣り合う縦線の間には少なくとも一本の横棒が置かれ，また，横棒同士はつながらないようにする．このとき

(1)　AA′, BB′間に置かれる横棒の本数がちょうど2本となる置き方は何通りあるか．

(2)　横棒の置き方は全部で何通りあるか．

**アプローチ**　(2)　AA′, BB′ 間，DD′, EE′ 間に横棒2本を置く場合と，BB′, CC′ 間，CC′, DD′ 間とでは事情が異なります．

**解答**　**(1)**　まず，AA′, BB′ 間に2本横棒を置く方法は，4本の点線から2本を選ぶことで決まるので，${}_4C_2$ 通りある．残り3本を左から順に1本づつ置いてゆく．BB′, CC′ 間は，AA′, BB′ 間に置いた2本と隣り合わない2ヶ所のうちから置く所を選ぶので2通りある．CC′, DD′ 間は BB′, CC′ 間と隣り合わない3通りの置き方，DD′, EE′ 間は，CC′, DD′ 間と隣り合わない3通りの置き方がある．

▶ 左から順に置いてゆくが，別に右からでもかまわない．さらに言えば，また BB′, CC′ 間から始めて隣り合う所から順に決めていってもかまわないのである．

以上より，求める置き方の総数は

$${}_4C_2\times2\times3\times3=\mathbf{108}\ \textbf{(通り)}\quad である．$$

**(2)**　2本横棒を置く縦棒間に応じて場合分けする．AA′, BB′ 間，または DD′, EE′ 間に2本置く場合，(1)で調べたようにそれぞれ108通りある．

BB′, CC′ 間，または CC′, DD′ 間に2本置く場合，(1)で行なったのと同様に横棒を左から置いてゆくことにより，それぞれの場合に72通りあることがわかる．

▶ 上と同じ注意

▶ $4\times{}_3C_2\times2\times3=72$

以上より，横棒の置き方の総数は

$$108\times2+72\times2=\mathbf{360}\ \textbf{(通り)}\quad である．$$

## B.623

1つの円周上に点$A_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$がある．これら$n$個の点のうちの任意の2点を結ぶ直線は，どの2本も平行でなく，どの3本も$A_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$以外の同一点を通らない．このとき，これらの直線の交点のうち，円の内部にあるものの個数$N_1$と外部にあるものの個数$N_2$を次の場合について求めよ．

(1)　$n=4$ の場合

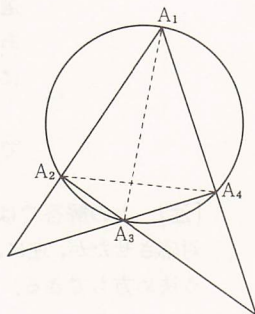
(2)　一般の$n$ $(n \geqq 4)$の場合

**アプローチ**　四角形$A_1A_2A_3A_4$の対角線の交点と互いに向い合う辺の延長の交点が，円の内部，外部のいずれにあるかを考察します．

**解答**　(1)　$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$を頂点とする四角形を作る．これらの2頂点を結ぶ直線の交点で円の内部にあるのは，四角形の対角線の交点だけである．また，互いに向い合う辺の延長は平行でないから必ず交わる．このような交点は2個で，これらは円の外部にある．

よって，

$$N_1=1,\ N_2=2$$

である．

(2)　$A_1$, $A_2$, $\cdots\cdots$, $A_n$から4点を選ぶと，それら4点を結ぶ直線の交点で円の内部，外部にあるものは，(1)で示した通り，それぞれ1個，2個である．

$A_i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$の2点を結ぶ直線のどの3本も同一の点を通らないことから，上で求めた交点がすべて相異なることがわかる．よって，$N_1$は$n$個の点から4点を選ぶ方法の個数に等しく，$N_2$はその2倍である．

したがって，

$$\begin{cases} N_1={}_n\mathrm{C}_4=\dfrac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ N_2=2\cdot{}_n\mathrm{C}_4=\dfrac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n-3) \end{cases}$$

である．

## B.624

1から$n$までの整数を一列に並べる順列を考える．並べた順列を$a_1$，$a_2$ …… $a_n$と表すことにする．すべての$i$，$1 \leqq i \leqq n$ に対し，$a_i \leqq i+1$ を満たす並べ方は何通りあるか．

**アプローチ** まず$a_1$に目をつけるのがよいでしょう．

**解答** $a_1$，$a_2$，…… と順に数を選んでゆくと考える．$a_1$の選び方は1と2の2通りある．$a_2$の選び方は，1と2と3のうち，$a_1$として選んだものを除いた2つから1つを選ぶ2通りある．いま，$k \leqq n-2$ として，$a_1$から$a_k$まで選んだとする．$a_{k+1}$の選び方は，1から$k+2$までの数のうち$a_1$，…，$a_k$として選んだ$k$個の数を除いた2数から1つを選ぶ2通りある．$a_{n-1}$まで選べば，$a_n$は残りの数として自動的に決まる．以上より，条件を満たす並べ方は

$$2^{n-1} \text{ (通り)}$$

である．

$a_1 \leqq 1+1=2$

$a_2 \leqq 2+1=3$

［注］ 上の解答では，各$a_i$に対して1から$n$の整数のうちの1つを対応させたが，逆に，1から$n$までの各整数を何番目に並べるか，という決め方もできる．このときは，$n$から始めて大きい順に決めてゆくことになる．

**別解** （漸化式を用いた解き方）

求める並べ方の個数を $S(n)$ と表すことにする．$n=1$ のときは $S(1)=1$ である．次に，$S(n+1)$ を $S(n)$ で表すことを考える．整数 $n+1$ を並べる場所は$n$番目と $(n+1)$ 番目の2通りの選択，すなわち，$n+1=a_n$，$n+1=a_{n+1}$ の2つの場合が考えられる．$n+1=a_{n+1}$ を満たす並べ方は，問題の条件を満たす1から$n$までの整数の並べ方と同じである．一方，$n+1=a_n$ を満たす並べ方は，$a_n=n+1$ と$a_{n+1}$を入れかえることによって，$n+1=a_{n+1}$ を満たす並べ方に1対1に対応づけられる．したがって，$S(n+1)=2S(n)$ となり，$S(1)=1$ より，$S(n)=2^{n-1}$ となる．

漸化式は「数A」で学ぶ内容ではある．固定された1つの$n$に対して問題を考えるのでなく，隣り合う2つの$n$に対する問題の関係に注目するのである．

本当に1対1対応になるか確かめてほしい．

## B.625

サイコロを4回投げて，$k$ 回目に出た目を $a_k$ とする．
このとき，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$ となる目の出方は何通りあるか．

**アプローチ** $a_1 \leqq a_2$，$a_3 \leqq a_4$ の等号が成り立つ場合とそうでない場合で分けるのが地道な行き方でしょう．他に，重複組合せの公式を示すときに使った考え方を用いる方法があります．

**解答** $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$，$a_1 = a_2 < a_3 < a_4$，
$a_1 < a_2 < a_3 = a_4$，$a_1 = a_2 < a_3 = a_4$
の4つの場合に分けて数える．

(1) $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ となる場合
このときは6つのサイコロの目から4つ選ぶ方法を数え上げればよいから，
$${}_6C_4 = 15 \text{（通り）ある．}$$

(2) $a_1 = a_2 < a_3 < a_4$ となる場合
このときは6つのサイコロの目から3つ選ぶ方法を数え上げればよいから，
$${}_6C_3 = 20 \text{（通り）ある．}$$

(3) $a_1 < a_2 < a_3 = a_4$ となる場合
(2)と同じで，
20(通り）ある．

(4) $a_1 = a_2 < a_3 = a_4$ となる場合
6つのサイコロの目から2つ選ぶ方法を数え上げればよいから，
$${}_6C_2 = 15 \text{（通り）ある．}$$

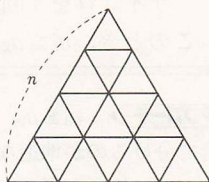
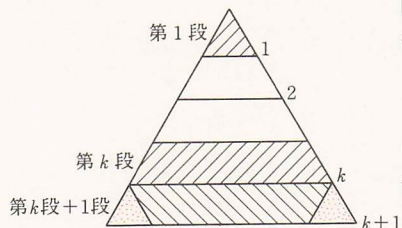
以上合わせて
$$15 + 20 + 20 + 15 = \mathbf{70} \text{（通り）}$$
ある．

**別解** $b_1 = a_1$，$b_2 = a_2 + 1$，$b_3 = a_3 + 1$，$b_4 = a_4 + 2$ とおくと，$a_1 \leqq a_2 < a_3 \leqq a_4$，$1 \leqq a_i \leqq 6$ $(i = 1, \cdots, 4)$ を満たす $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ と $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$
$1 \leqq b_i \leqq 8$ $(i = 1, \cdots, 4)$ を満たす $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ とは1対1に対応する．よって，このような $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ の個数を数えると，${}_8C_4 = \mathbf{70}$ **(通り)** となる．

## B.626

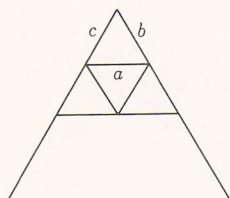
長さ1の棒がたくさんある．これを平面上に右図のように並べることによって，一辺が $n$ の正三角形を作る．このとき

(1)　辺の長さが1の正三角形はいくつあるか．

(2)　必要な棒の本数はいくらか．

**アプローチ**　大きな三角形を，横の段に分けて考えます．(2)は正三角形の対称性を利用してみます．

**解答**　**(1)**　各段にある辺の長さが1の正三角形の個数は一つ上の段にある正三角形の個数より2つ多い．

よって，上から $k$ 段にある正三角形の個数は $(2k-1)$ 個である．よって，辺の長さが1の正三角形の個数は全部で

$$1+3+\cdots\cdots+(2n-1)=\boldsymbol{n^2}\ \textbf{(個)}$$

である．

**(2)**　左図における辺 $a$ と平行に置かれている棒の本数を求めると，第 $k$ 段の下辺に並べられている棒の本数が $k$ 本あることより，全部で，

$$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\ (本)$$

あることがわかる．

辺 $b$，辺 $c$ と平行に置かれている棒の総数はそれぞれ，辺 $a$ と平行に置かれている棒の総数と等しい．

正三角形を回転させてみればわかる．

よって，求める本数は

$$3\times\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{3}{2}n(n+1)}\ (本)$$

である．

［注］(1)の結果を用いて割と容易に(2)の結果を得ることも出来る．考えてみて下さい．

## B. 627

3種類の文字 $a$, $b$, $c$ を使って，文字の並び(単語)を作る．但し，“$bac$”のように異なる3文字が連続することのないようにする．このとき $n$ 文字からなる単語の総数を $W_n$ とおく．$W_4$ を求めよ．

**アプローチ**　$n=1$ から $n=3$ ぐらいまで，実際に単語を書き下してみます．$n$ 文字の単語の右側に1つ文字をつけ加えて $n+1$ 文字の単語を作るとき，どの文字を加えることが出来るでしょうか？

**解答**　$n=1$ のとき，$a$, $b$, $c$ の3単語がある．すなわち $W_1=3$.

$n=2$ のとき，$aa$, $bb$, $cc$, そして $ab$, $ac$, $ba$, $bc$, $ca$, $cb$ の9単語がある．すなわち $W_2=9$.

さて，$n=3$ のときを考える．$aa$, $bb$, $cc$ に対しては $a$, $b$, $c$ のどの文字も右側につけ加えることができるが，$ab$, $ac$, $ba$, $bc$, $ca$, $cb$ の各単語に対しては，それぞれまだ用いられていない1文字以外の2文字を使うことができる．

◀つまり，用いられた2文字

$$W_3=3\times3+6\times2=21$$

となる．

一般に，$n$ 文字からなる単語のうち，最後の2文字が同じである単語の総数を $A_n$，最後の2文字が異なる単語の総数を $B_n$ で表すことにすると，

$$W_n=A_n+B_n$$

$$A_{n+1}=A_n+B_n \qquad A_2=3$$

$$B_{n+1}=2A_n+B_n, \qquad B_2=6$$

なる関係式を得る．

◀・・・$ab$ なる単語に1文字加えて最後の2文字が異なるようにするためには，その1文字は $a$ でなくてはならない．

これにより，$A_3$, $B_3$, $A_4$, $B_4$ を順に求めると

$$\begin{cases} A_3=9 \\ B_3=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_4=21 \\ B_4=30 \end{cases}$$

となる．したがって

$$W_4=A_4+B_4=\mathbf{51}$$

[注]　$\{W_n\}$ は，$W_{n+2}=W_n+2W_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) という関係を満たす．

## B. 628

　1から $n$ までの自然数を空でない $k$ 個の部分に分ける場合の数を $S_n(k)$ で表すことにする．$n>2$ のとき，次の数をそれぞれ求めよ．

(1)　$S_n(n-1)$　　(2)　$S_n(n-2)$　　(3)　$S_n(2)$

**アプローチ**　一般の $S_n(k)$ を求めるのはやっかいですが，$k$ が $n-1$, $n$, 2, のようなときは何とかなります．

**解答**　**(1)**　$n-1$ 個の部分への分割は，どの2数を同じ部分に属させるかで決まる．すなわち，2数の選び方で決まるので，その場合の数は

$$S_n(n-1)={}_nC_2=\boldsymbol{\frac{n(n-1)}{2}}$$

である．

**(2)**　$n-2$ 個の部分への分割は，①3数からなる部分1つと1数からなる $n-3$ 個の部分に分ける仕方と，②2数からなる部分2つと1数からなる $n-4$ 個の部分に分ける仕方，の2つの場合がある．

　①の場合　3数からなる部分に属する3数の選び方で分割が決まるので，その場合の数は ${}_nC_3$ 通りである．

　②の場合　$n\geqq 4$ のとき，分割は2数からなる部分に属する4数 $a_1<a_2<a_3<a_4$ と，$a_1$ と同じ部分に属する数の選び方で決まる．その場合の数は

${}_nC_4\times 3=\frac{1}{8}n(n-2)(n-2)(n-3)$ 通りである．

$n=3$ のときは0通りであり，やはりこの表示が成立する．以上より，

$$S_n(n-2)={}_nC_3+\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

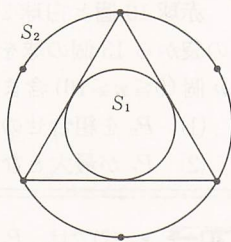
$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(3n-5)}.$$

ある1つの自然数(たとえば1)に注目．

**(3)**　2つの部分への分割は，2から $n$ までの自然数それぞれに対し，1と同じ部分に属するか否か指定することで決まる．ただし，すべて1と同じ部分に属する場合を除く．したがって

$$S_n(2)=\boldsymbol{2^{n-1}-1}.$$

## B. 629

円$S_2$の3等分点をとり，それらを結んで出来る正三角形の内接円を$S_1$とする．$k$を正の整数として，$S_2$の$3k$等分点から3点をとって三角形をつくる．その三角形の3辺のうち$S_1$と交わるか接するものが1本以下であるような3点の選び方の総数を求めよ．

**アプローチ** 三角形の1つの辺が$S_1$と交わるための必要十分条件をその辺の両端が円周上でどのくらい離れているかで表します．問題がややこしく思われる人は，$k$を多少大きくとって，三角形と$S_1$がどのような関係を取りうるかいろいろ調べてみて下さい．

**解答** $S_2$上の$3k$等分点から2点A，Bをとる．線分ABが$S_1$と交わりも接しもしないためには，BがAから反時計まわりに数えて$3k$等分点$\gamma$個進んだ所にあるとすると，$\gamma<k$，または$\gamma>2k$であることが必要十分である．

$3k$等分点から反時計まわりに順にA，B，Cをとる．BはAから反時計まわりに数えて$3k$等分点$\gamma$個進んだ所にあり，CはBから$\alpha$個進んだ所にあり，AはCから$\beta$個進んだ所にあるとする．AB，BC，CAのうち，$S_1$と交わりも接しもしないものが2本以上あるための条件は，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$のうち，ちょうど2つが$k$未満となることである．さて$\beta<k$，$\gamma<k$となるような順でA，B，Cを取ることにする．すると，上のような3点のとり方は，3等分点のうちの一点Aと，$\beta$，$\gamma$の取り方で完全に決定される．よって，その個数は

◁ $\alpha+\beta+\gamma=3k$

◁ [注]参照

◁ このようなABCの順序は1通りである．

$$\boldsymbol{3k\cdot(k-1)^2}\text{(通り)}$$

である．

[注] 「$\alpha$，$\beta$，$\gamma$のうち，少なくとも2つが$<k$，または$>2k$」という条件は，$\alpha+\beta+\gamma=3k$の下では「$\alpha$，$\beta$，$\gamma$のうち，ちょうど2つが$<k$」と同値である．各自確めてほしい．

## B. 630

赤球 10 個と白球 20 個をよくまぜて袋に入れてある．この袋から 13 個の球を一度に取り出すとき，その中に赤球が $n$ 個 $(0 \leqq n \leqq 10)$ 含まれる確率を $P_n$ とする．

(1)　$P_n$ を組合せの個数の記号と $n$ を用いて表せ．

(2)　$P_n$ が最大となる $n$ を求めよ．

**アプローチ**　(2)では，$P_{n+1}$ と $P_n$ の大小を比較することによって，$n$ が変化するとき $P_n$ がどのように変化するか調べます．

**解答**　**(1)**　30 個の球から 13 個の球を取り出す場合の数は ${}_{30}C_{13}$ 通りで，そのうち，赤球が $n$ 個，白球が $(13-n)$ 個である取り出し方は，${}_{10}C_n \cdot {}_{20}C_{13-n}$ 通りである．よって，

$$P_n = \frac{{}_{10}C_n \cdot {}_{20}C_{13-n}}{{}_{30}C_{13}}.$$

**(2)**　$0 \leqq n \leqq 9$ のとき，$P_{n+1}$ と $P_n$ の大小を比較する．

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_{10}C_{n+1} \cdot {}_{20}C_{13-(n+1)}}{{}_{30}C_{13}} \times \frac{{}_{30}C_{13}}{{}_{10}C_n \cdot {}_{20}C_{13-n}} \\ &= \frac{10!}{(n+1)!(9-n)!} \cdot \frac{20!}{(12-n)!(8+n)!} \\ &\quad \cdot \frac{n!(10-n)!}{10!} \cdot \frac{(13-n)!(7+n)!}{20!} \\ &= \frac{(10-n)(13-n)}{(n+1)(8+n)}\end{aligned}$$

ここで

分母分子の大小を見るために差をとっている．

$$(10-n)(13-n)-(n+1)(8+n) = -32n+122$$

より，$n \leqq 3$ のとき $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ すなわち $P_{n+1} > P_n$，

$n \geqq 4$ のとき $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$，すなわち，$P_{n+1} < P_n$ である．

$$\therefore \quad P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 > \cdots\cdots.$$

これより，$P_n$ が最大となる $n$ の値は 4 であることがわかる．

## B.631

石，鋏(はさみ)，紙が描かれた札がそれぞれ50枚ある．これからB君が50枚を選び，その後にA君が50枚を選び，各々手持ちの札から無作為に1枚を選んでジャンケンを行う．

(1)　B君が選んだ後の残りの札は紙が一番少なく，石と鋏は同数だった．A君は勝つ確率を最大にするためにどのように札を選べばよいか．また，この時のA君の勝つ確率を求めよ．ただしB君の石の札の枚数を$g$とする．

(2)　(1)の状況の下で，A君の勝つ確率を最小にするためには，B君は石，鋏，紙をそれぞれ何枚ずつ選べばよいか．

**アプローチ**　まずA君，B君の石，鋏，紙の枚数に応じて，A君，B君の勝つ確率がどうなるか調べておきます．

**解答**　A君が石，鋏，紙それぞれ$g_1$，$(50-g_1-p_1)$，$p_1$枚選んだとすると，A君の勝つ確率$P$は

$$P=\frac{g_1}{50}\cdot\frac{g}{50}+\frac{50-g_1-p_1}{50}\cdot\frac{50-2g}{50}+\frac{p_1}{50}\cdot\frac{g}{50}$$

$$=\frac{1}{2500}\{2500+(p_1+g_1)(3g-50)-100g\}$$

◀ A君が勝つのは(A,B)=(石,鋏),(鋏,紙)または(紙,石)の場合．

**(1)**　$3g-50<0$ だから $p_1+g_1$ が最小になるとき，A君の勝率は最大となる．ここで

◀ B君の札は紙が一番多いから $50-2g>g$.

A君の鋏の枚数$=50-(p_1+g_1)$

◀ これを最大にしたい．

であるから，**B君が取った残りの鋏の札$(50-g)$枚をA君がすべて取ればよい．**このとき $p_1+g_1=g$ なので

$$P=\frac{1}{2500}(3g^2-150g+2500)$$

となる．

**(2)**　$g$の取り得る値の範囲は $0\leqq g\leqq 16$ である．

◀ $3g-50<0$

このとき，$P$を最小にする$g$の値を求めると

$$P=\frac{1}{2500}\{3(g-25)^2+625\}$$

より，$g=16$ となる．したがって，B君は，石，鋏，紙をそれぞれ **16枚，16枚，18枚** 選べばよい．

Repos

## なぜ証明をするのか

三角形の内角の和が180°になるということは，誰でも知っている。教えられて覚えるのに苦労はないだろうし，かなり疑い深い人でさえ三角形を100個も描いてみればいやでも納得するだろう。それではなぜ証明するのか。

「太陽のかけらを庭に持って来れば冬でも暖かいだろうというようなとんでもないことはいくらでも考えるけれど，証明をしようなどとは思いもよらないですよ」と言われたことがある。なるほど世の多くのいとなみの中にあって数学の証明とはたいそう風変りなもののようだ。

小学生のときなぜか「ふたつの直線が交わると反対側に同じ大きさの角ができる」ということに気づいたことがあった。そして「あたりまえだ」という考えと「なぜだろう」という疑問が交錯した。それから2，3日気にしていたのだろう，あるときふと「180°から同じ角を引くと同じ角が残るからだ」という考えが浮かんだ。そのときの嬉しさはいまも胸に残っている。そして得意になって話した先生から「証明」という言葉を聞いた。

さて中学生になってまもなく，これに似た問題が教室で出された。ところが，友達も私のように悩み私のように楽しむだろうという期待はみごとに裏切られ，彼等はいともたやすくこの問題を解決してつぎの問題にとりかかっている。そのときの落胆はやはり胸に残っている。

数学を修得する上で大切なのは，「いかに証明するか」を沢山覚えることではなく，「証明を与える喜び」を味わうことだと思う。＜証明＞とは，単に正しさを保証するだけの手続きではなく，我々の認識を明るく照らす＜照明＞でもあるのではなかろうか。

# C. 探究篇

本篇では，数学Ｉに登場する数学的概念のうち，

教科書や中級の参考書では，さりげなく通り過ぎている（あるいは，無自覚に飛ばしている）もの

や

「指導要領」の制約のために，本来の自然な発展的記述を中断されているもの

を，意欲高い読者のために，項目別にまとめたものである．

ところによっては，理解に困難を感ずることもあるだろうが，あまり神経質にならずに，何回も繰り返して読んでもらいたい．自分の興味のある項目を，ひろい読みするだけでも，もちろん良い．

## C.1　2次方程式と2次不等式

2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

と2次不等式

$$ax^2+bx+c>0 \qquad \cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

の解法については，第1章で学んだ通りで，両者の解法の基礎にあるのは，2次式の因数分解

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

である．2次方程式の場合は，この後，数の基本性質

$$XY=0 \implies X=0 \quad \text{または} \quad Y=0$$

（「積が0となるのは，少なくとも一方が0のとき」）

に基づいて，解

$$x=\alpha \quad \text{または} \quad x=\beta$$

を導く．

一方，不等式の場合に基本となるのは，実数の基本性質

$$XY>0 \iff (X>0 \quad \text{かつ} \quad Y>0) \\ \text{または} (X<0 \quad \text{かつ} \quad Y<0)$$

（「2数の積が正となるのは，2数が同符号のとき」）

であるから，これを使うことができるためには，(＊)の右辺の$\alpha$，$\beta$が実数の範囲に見つからなければならない．

判別式 $b^2-4ac<0$ のときは，このような実数$\alpha$，$\beta$が存在しないので，数学Ⅰの範囲では，

Ⓐの解は存在しない

となるが，他方，不等式Ⓑについては，平方完成という，特別の技巧を用いることにより

$$Ⓑの解は，\begin{cases} a>0 \text{ のときは　実数全体} \\ a<0 \text{ のときは　存在しない} \end{cases}$$

が導かれる．類似と相異が錯綜するこの2つのテーマを，現指導要領は，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを想い浮かべることによって，〈直観的に〉 納得することを求めている．

## C.2 方程式と関数

「方程式を解くのに，関数のグラフを利用する」経験は，本書のB篇を勉強した読者は，相当に積んだはずであるが，「方程式」，「関数」，「グラフ」，……といった概念の意味と区別について，自信をもって答えられる読者は，どれほどいるだろうか？具体的な場面での解説は，すでに行って来ているので，ここでは，やや一般的な立場から述べよう．

まず，方程式とは，**未知数** と呼ばれる文字を含む等式である．さらに正確にいうと，この等式を満たす未知数の値を求めようという意図をもって，この等式に臨むとき，これを方程式というのである。たとえば，等式

$$ax=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

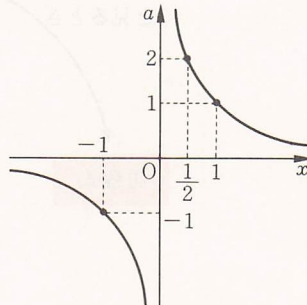
において，$a$ を与えられた定数として，①を満たす $x$ の値を求めようと考えるときには，$x$ についての方程式であり，反対に，$x$ を与えられた定数として，①を満たす $a$ の値を求めようと考えるときには，$a$ についての方程式という．それぞれの解は

$$\begin{cases} a \neq 0 \text{ のとき } x=\dfrac{1}{a} \\ a=0 \text{ のとき なし,} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \text{ のとき } a=\dfrac{1}{x} \\ x=0 \text{ のとき なし} \end{cases}$$

となる．

さらに，$a$ と $x$ を同格の未知数として，①を $a$ と $x$ についての方程式と見る立場もありうる．当然，解は無数にあり，

$$\begin{cases} a=2 \\ x=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ x=1, \end{cases} \begin{cases} a=-1 \\ x=-1, \end{cases} \cdots\cdots$$

は，すべて解である．この解の集合を $xa$ 平面に図示すると，右のような双曲線になる．これが，$x$ と $a$ についての方程式①のグラフである．

他方，$x$ を，値が変化する **変数** とし，$x$ の値の変化に応じて，変数 $a$ の値が決まっていくと考えるならば，方程式によって，変数 $x$ の値に変数 $a$ の値が対応する関数が定められていることになる．前ページの曲線を，この関数のグラフと呼ぶこともある．

数学に頻繁に登場する重要な関数としては，このように方程式を使って表されるものが，圧倒的に多い．つまり，未知数 $x$，$y$ についての方程式 $y=f(x)$ を使って，「$x$ を決めると $y$ が決まる」関数が表されるのである．

以上をまとめると，次のようになる．

[まとめ]

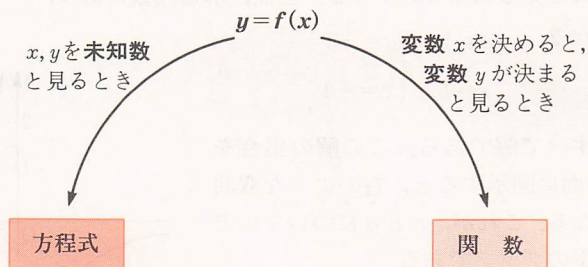
(1)　2つの未知数 $x$，$y$ についての方程式

$$F(x,\ y)=0$$

が与えられたとき，これを満たす $x$，$y$ の組 $(x,\ y)$ を座標にもつ点全体の作る集合を，「方程式 $F(x,\ y)=0$ のグラフ」という．

(2)　変数 $x$ に変数 $y$ を対応させる関数が，

$$y=f(x)$$

という方程式で表されるとき，この方程式のグラフを「関数 $y=f(x)$ のグラフ」という．

## C.3 最大値は無限大？

2次関数

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a,\ b,\ c\ は定数,\ a\neq 0)$$

において，

$$\begin{cases} a>0\ のときは，最小値はあるが最大値はない \\ a<0\ のときは，最大値はあるが最小値はない \end{cases}$$

ということは，第1章で詳しく学んでいる．しかし，「無限大」という言葉や，これを表す記号 $\infty$ を知っている読者は，

$a>0$ のときは，最大値は無限大($\infty$)

$a<0$ のときは，最小値は負の無限大($-\infty$)

であると考えたくなるのではないだろうか？（実は，若き日の著者の1人は，こう考えていた.）

この疑問に答えるためには，初めに，「無限大」ということばで，何が表現されているかを精密にとらえる必要がある．「いかなる数よりも大きい数」という定義は，一見もっともらしいが，傍点部分に注意すれば，矛(ほこ)と盾(たて)の故事を連想させる論理的困難を孕(はら)んでいることがわかる．「いかなる数よりも大きいもの」といいかえてみたところで，今度は，「ものとは何か？」という，より深刻な問題が残るばかりである．日常的な言語を使ったいかなる定義も，結局は，これらとあまり変わらない．

そこで，普通の数学では，

「いくらでも大きい数が存在する」　………(＊)

という命題を基本的なものとして受け入れる．(＊)に対応する事実は，日常生活では，

「上には上がある」

と表現される．これは，要するに

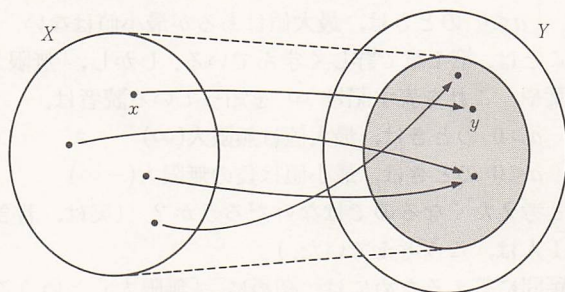
「一番上のものはない」

ということである．数学では，これを

「最大値は存在しない」

と表現するのである．

## C.4 関数，変換，写像，…

高校以上の数学では，中学で学んだ「関数」以外に，「変換」，「写像」という語が頻繁に登場する．どれも実質的には違わないので，あまり，神経質に区別する必要はないが，安心のために，ここできちんと整理しておこう．

［定義］ $X$，$Y$ を空でない集合とする．

$X$ の任意の要素 $x$ に対し，これに対応する $Y$ の要素 $y$ がただ1つ存在するとき，この対応を，$X$ から $Y$ への **写像** といい，記号 $f$ などで表す．また，写像 $f$ により，$y$ が $x$ に対応することを，$y=f(x)$ と表す．

とくに，$X$，$Y$ が数の集合であるときは，写像を **関数** と呼ぶ．

また，$X=Y$ の場合には，写像を **変換** と呼ぶことがある．

厳密に書こうとすると，こんな面倒な表現になるが，数学において，実際に問題となるのは，次のような場合である．

例1　$x$ が実数値をとって変化するときの，関数 $y=x^2$ は $X=Y=\boldsymbol{R}$（実数全体）として，$X$ から $Y$ への写像である．

例2　実数値をとって変化するパラメタ $t$ で表される動点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ は，$X=\boldsymbol{R}$（実数全体）から $Y=\boldsymbol{R}^2$（平面全体）への写像を考えていることになる．

例3　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が平面上を動くときこれに対応する動点 $\mathrm{Q}(x+y,\ x-y)$ を考えることは，$X=Y=\boldsymbol{R}^2$（平面全体）として，$X$ から $Y$ への写像を考えることに相当する．このような場合，平面上の点の **変換** という．

## C.5 図形の移動

点 P$(x,\ y)$ を，

(1) $x$ 方向に $a$，$y$ 方向に $b$ だけ平行移動すると，
点 $P_1(x+a,\ y+b)$ に

(2) 原点に関して対称移動すると，
点 $P_2(-x,\ -y)$ に

(3) $x$ 軸に関して対称移動すると，
点 $P_3(x,\ -y)$ に

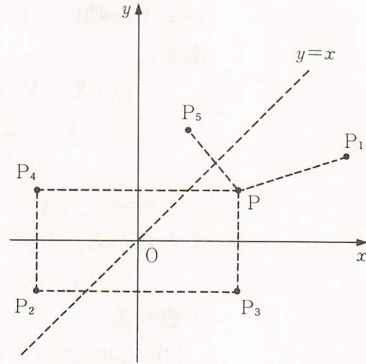
(4) $y$ 軸に関して対称移動すると，
点 $P_4(-x,\ y)$ に

(5) 直線 $y=x$ に関して対称移動すると，点 $P_5(y,\ x)$ に

それぞれ移る．

それでは，方程式

$$f(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

で表される $xy$ 平面上の曲線は，どのような曲線に移されるだろうか．

**[定理]** 曲線①を

(1) $x$ 方向に $a$，$y$ 方向に $b$ だけ平行移動すると，
曲線 $f(x-a,\ y-b)=0$ に，

(2) 原点に関して対称移動すると，
曲線 $f(-x,\ -y)=0$ に，

(3) $x$ 軸に関して対称移動すると，
曲線 $f(x,\ -y)=0$ に，

(4) $y$ 軸に関して対称移動すると，
曲線 $f(-x,\ y)=0$ に，

(5) 直線 $y=x$ に関して平行移動すると，
曲線 $f(y,\ x)=0$ に，

それぞれ移る．

**証明：** (1) 問題の平行移動は，点 $(x,\ y)$ を，

$$X=x+a \quad \cdots\cdots ②$$

$$Y=y+b \quad \cdots\cdots ③$$

で定まる点 $(X,\ Y)$ に移す"写像"であり，我々の目的は，この写像による①の像を求めること，すなわち，点 $(x,\ y)$ が①上を動いたとき点 $(X,\ Y)$ の描く軌跡を求めることである．

点 $(X,\ Y)$ が求める軌跡上にある．
$\iff$ ①，②，③を満たす $x$，$y$ が存在する
$\iff$ $x=X-a$，$y=Y-b$ が①を満たす
$\iff$ $f(X-a,\ Y-b)=0$

であるから，写像②，③による①の像は，

$$f(x-a,\ y-b)=0$$

と表せる．

(2)〜(5)においても同様に，

(2) $\begin{cases} X=-x \\ Y=-y \end{cases}$ (3) $\begin{cases} X=x \\ Y=-y \end{cases}$

(4) $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$ (5) $\begin{cases} X=y \\ Y=x \end{cases}$

で与えられる写像による①の像を求めればよい．■

1° 直　線 $y-b=m(x-a)$
放物線 $y-b=(x-a)^2$

は，それぞれ

直　線 $y=mx$
放物線 $y=x^2$

を(1)のように移動したものである．

2° 方程式①が $y$ について解けるとき，①は，ある関数 $y=g(x)$ を定める．さらに①が $x$ についても解けるならば，関数 $g(x)$ は**逆関数**を持つ．このとき，曲線 $f(x,\ y)=0$ は $y=g(x)$ のグラフであり，(5)で求めた曲線 $f(y,\ x)=0$ は，この逆関数のグラフとなる．

## C.6 図形の変形

**(放物線は，みな相似)**

$xy$ 平面上で，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

(1) $\mathrm{P}_1(2x,\ y)$ は，P を $x$ 軸方向に2倍の位置に伸ばした点

(2) $\mathrm{P}_2(x,\ 2y)$ は，P を $y$ 軸方向に2倍の位置に伸ばした点

(3) $\mathrm{P}_3(2x,\ 2y)$ は原点を相似の中心として，2倍に拡大した点

である．それでは，方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される $xy$ 平面上の曲線 $C$ に対し，

(1) $f(2x,\ y)=0$

(2) $f(x,\ 2y)=0$

(3) $f(2x,\ 2y)=0$

は，それぞれどんな曲線を表すであろうか？　(1), (2), (3)はどれも似たようなものだから，(1)の場合を一般化した次の定理を証明しよう．

> **[定理]**　曲線 $C : f(x,\ y)=0$ に対し，これを $x$ 軸方向に $a$ 倍に伸ばした曲線 $C'$ は，方程式
>
> $$f\left(\frac{1}{a}x,\ y\right)=0$$
>
> で表される．ただし，$a$ は0でない実数とする．

**証明：**　点 $(x,\ y)$ を，$x$ 軸方向に $a$ 倍に伸ばした点を，$(X,\ Y)$ とおくと

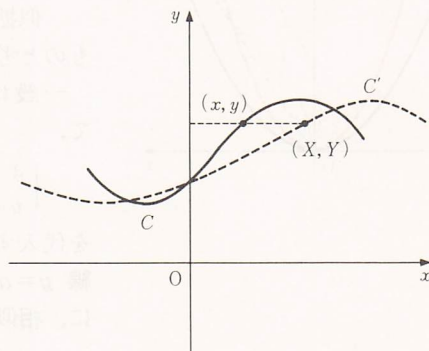
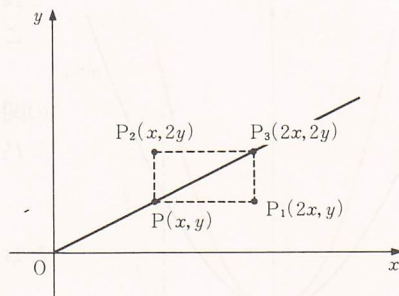
$$\begin{cases} X=ax \\ Y=y \end{cases}$$

という関係がある．よって，

点 $(X,\ Y)$ が $C'$ 上にある

$\iff$ 点 $(x,\ y)=\left(\dfrac{X}{a},\ Y\right)$ が $C$ 上にある

$\iff$ $f\left(\dfrac{X}{a},\ Y\right)=0$

である．

ゆえに，$C'$ は，方程式

$$f\left(\frac{x}{a},\ y\right)=0$$

で表される．■

ここで証明されたことを応用して，放物線

$$P_1 : y=x^2,\ P_2 : y=2x^2$$

の関係を考えてみよう．

$P_2$ の方程式は，$P_1$ の方程式において，

$y$ のかわりに $\dfrac{y}{2}$

とおいたものにほかならないから，$P_2$ は，

$P_1$ を $y$ 軸方向に 2 倍に伸ばした

ものと考えることができる．

一方，$P_1$ の方程式において

$x$ のかわりに $\sqrt{2}\,x$

とおいても，$P_2$ の方程式が得られるから，$P_2$ は，

$P_1$ を $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に伸ばした

ものであるともいえる．

さらにまた，$P_1$ の方程式において

$x$ のかわりに $2x$

$y$ のかわりに $2y$

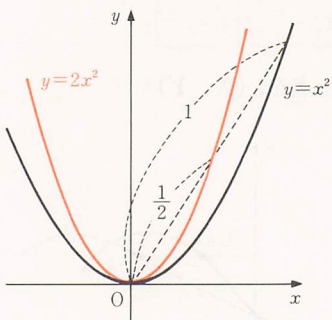
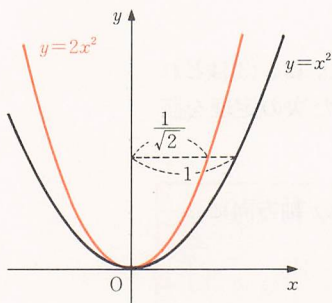
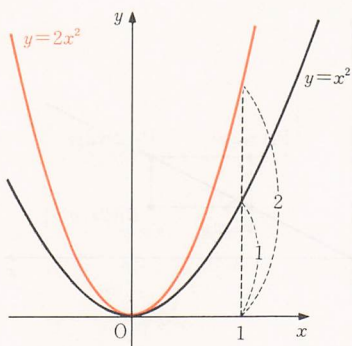
とおいても，$P_2$ の方程式が得られるので，$P_2$ は，

$P_1$ を原点を相似の中心として $\dfrac{1}{2}$ 倍に相似拡大した

ものと考えることもできる．

一般に，$y=ax^2\,(a \neq 0)$ は，$y=x^2$ において，

$$\begin{cases} x \text{ のかわりに } ax \\ y \text{ のかわりに } ay \end{cases}$$

を代入することによって得られるから，**放物線 $y=ax^2$ は，$a$ の値によらず放物線 $y=x^2$ に，相似である．**

## C.7 「同様に確からしい」とは

確率の議論では，「同様に確からしい」という表現をよく使う．これは，場合の数の割り算に基礎をおく確率計算においては，本質的なことである．

「コインを2回まで投げられる．1回でも裏が出たら負け」というゲームをするとすると，ゲームの進行は，次の3通りだけである．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1回目　表 | 2回目　表 | …… | 勝ち |
| | 2回目　裏 | …… | 負け |
| 1回目　裏 | | …… | 負け |

このうち，負けは，2通りある．このことから，このゲームで負ける確率は $\frac{2}{3}$ であると推論することの誤りについて，詳しく解説する必要はあるまい．「1回目 表　2回目 表」「1回目 表　2回目　裏」と「1回目 裏」が同様に確からしくないのである．

しかし，よく考えて見ると，表裏同型でもないコインを投げて，表と裏が出るのがなぜ同様に確からしいのかは，自明ではない．コイン投げの実験を繰り返すことで，相対頻度を計測することはできるが，その相対頻度が正しい確率の値に必ず近づいていく保証もない(表，裏同様に確からしいコインの場合では，100回投げてすべて表が出るという確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ だけある！)．数学では，コイン投げにおいて，「表が，より出そうだ，とも，反対に裏が出そうだとも，まったくいえない」ということを，両者が同様に確からしい(どちらももっともらしい)というのである．

現実の現象においては，この前提が正しいとは限らない．(100円玉と500円玉では違うかもしれない．)その場合には，確率の考察の出発点となる根元事象に，等しくない確率を割りふるところから始めなければならないが，その割りふりが正しいこと自身は，数学的に証明することは，できない．この意味で，確率論の現実への応用は意外に難しいのである．それにしても，「確率 $\frac{1}{2}$」が上のような意味であると理解した上で，「本日の降水確率は50％です」という天気予報を聞いてみると，なんだかおかしいですね．

# 索　　引

各項目の事項を記載してある箇所を示すのに，

　A篇(基礎理論)に関しては，小節の番号と共に(　)内にページも記しておいた．

　B篇(演習問題)，C篇(探究)に関しては，当該番号のみを示してある．

## ▨ あ ▨



## ▨ か ▨

## さ

## ▨ た ▨

## ま



## や



## ら



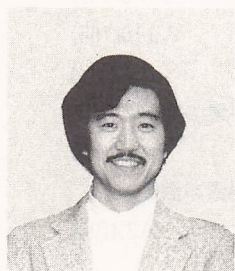
## わ

# 著者の先生方の横顔

## 藤田　宏

明治大学理工学部教授，東京大学理学部名誉教授

学生時代にすでに数学教育の重要性を認識，本書の前身「東大への数学」を執筆，研究教育・学術行政の要職の合間をぬって，数学教育国際委員会日本代表，文部省教育課程審議会委員，数学オリンピック財団理事長なども歴任され，数学教育に関し国際的・国内的に活躍していらっしゃいます．

## 長岡亮介

大東文化大学法学部教授

「東大に入って最も良かったことの1つは藤田宏先生にめぐりあえたこと」ということで,「大学への数学」との出会いも，藤田ゼミ時代．技術的数学に飽きたらず，その意味を求めて「数学史と数学教育にさまよい込んだ」ということで，今では「趣味は数学教育」だそうです．

東大や早大でも講義をなさっているので，先輩たちには，先生に習った人もいるかもしれませんよ！

## 長岡恭史

駿台予備学校教科専任講師

大学を出て，最初は，駿台甲府高校で教えていらっしゃったのですが，いまは有名な「スンダイ」の先生です．若い情熱と誠実な教え方で，生徒の信頼と尊敬を集めていらっしゃいます．

受験指導の現場を数多く経験した立場から“使いやすく”“わかりやすい”「大学への数学」のために多くの提案を出して頂きました．なお，先生は長岡亮介先生の弟さんです．

◇◇◇研文書院◇◇◇